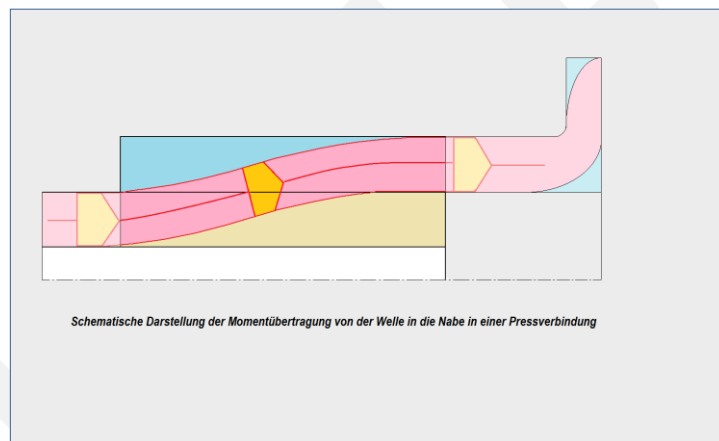


Drehmomentübertragung von der Welle zur Nabe bei Pressverbindungen

Transfer of torsional moment in a shaft-hub press joint



Contact: www.jblatt.de

Die Dokumentation wurde mit bestem Wissen und Gewissen erarbeitet. Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle erhebt die Dokumentation keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Unbeabsichtigte Fehler können auftreten. Hinweise auf inhaltliche Verbesserungen sind erwünscht. Für die Vervielfältigung des Dokumentes und die Übernahme von Auszügen ist die Zustimmung des Autors erforderlich. Für den Inhalt verlinkter Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

The paper was prepared to best of one's knowledge. The paper makes no claim to be complete and correct in spite of the careful control. References for improvements with regard to the content are welcome.

The duplication of the document and the taking over abridges require the approval of the author. The linked WEB-Site operators are responsible for contents of their own sites.

permanently under construction

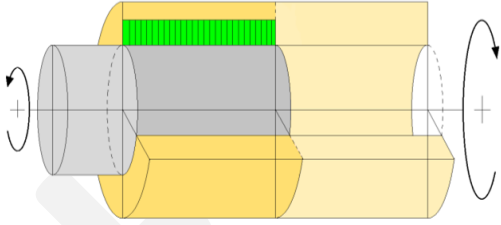
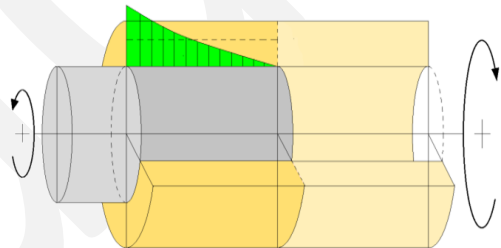
© Klaus-Jürgen Bladt

Rostock, 25 April 2016

Drehmomentübertragung von der Welle zur Nabe bei Pressverbindungen

Bedingung: ausschließlich elastische Verformungen

Transfer of torsional moment in a shaft-hub press joint / Condition: only for elastic deformations

	<h2>0. Einführung</h2>	
	<h3>0.1 Problem und Zielsetzung</h3>	
	<h4>Problem</h4>	
	<p>Bei der Auslegung von Pressverbänden zur Übertragung eines Drehmomentes wird allgemein bei der Überleitung dieses Momentes von der Welle in die Nabe von einer dafür erforderlichen, über die Nabenlänge <u>konstanten</u> mittleren Schubbelastung / Scherspannung in der Pressfuge für die Ermittlung der erforderlichen Pressung ausgegangen.</p>	 <p style="text-align: center;">$\tau_m = \mu \cdot p_F = \frac{M_t}{2 \cdot \pi \cdot r_F^2 \cdot l} = const$</p>
	<p>In der Realität wird das Moment in der Pressfuge mit einer über die Nabenlänge <u>veränderlichen Schubspannung</u> von der Welle in die Nabe übergeleitet. Es kann davon ausgegangen werden, dass beim Eintritt der Welle in Nabe ein größeres Moment von der Welle in die Nabe übertragen wird als am Ende der Nabe, an dem das Moment aus der Nabe abgeleitet wird.</p>	
	<p>Für Pressverbände, insbesondere für lösbare Pressverbindungen wie Ölpressverbände ist in den meisten Fällen ein auch <u>teilweises Rutschen in der Trennfuge unerwünscht</u>, da hier möglicherweise Reibrost und/oder Fresserscheinungen auftreten können, die ein Lösen der Verbindung behindern. Ein Verschieben der Oberflächen gegeneinander (Rutschen) tritt dann auf, wenn die Schubspannung in der Pressfuge durch die örtliche Reibung begrenzt ist.</p>	 <p style="text-align: center;">$\tau_{Fmax} \geq \tau_m = \mu \cdot p_F$</p>

	<h2>Hinweise in der Literatur</h2>	
	<ul style="list-style-type: none"> • Die Tendenz der Momentübertragung u.a. in [1] erwähnt und tendenziell dargestellt. In [2] wird ebenfalls auf die Nichtlinearität bei der Momentübertragung durch mehrere hintereinander liegende Ringspannelemente, einer ähnlich gelagerten Problematik, hingewiesen. • In [3] wurde mit den Möglichkeiten der klassischen Festigkeitslehre ein Verlauf des Momentübergangs bzw. Schubspannungsverlaufes über die Nabenlänge modelliert. Dieser Verlauf ist darstellbar durch eine Gleichung und hat weitgehend quantitativen Charakter. Die ermittelte maximale Schubspannung kann damit zur Einschätzung von Rutschen in der Pressfuge bei der Auslegung von Pressverbindungen für die Festlegung der erforderliche Pressung und der Sicherheit der Verbindung berücksichtigt werden. Es zeigt sich, dass ein Rutschen zwischen Welle und Nabe in Teilbereichen oft unvermeidlich ist, wenn der Aufwand für die Ausführung der Verbindung begrenzen ist. 	
	<p>[1] Schlottmann, D.: Maschinenelemente, Grundlagen, Berlin, VEB Verlag Technik, 1967, S. 111 [2] Roloff / Matek: Maschinenelemente, 15. Auflage, Verlag Vieweg, 2001, S. 371 [3] Müller, H. W.: Der Mechanismus der Drehmomentübertragung in Pressverbindungen, Darmstadt, Dissertation, 1961 Weitere Literaturangaben am Ende der Ausführungen</p>	

Ziel dieser Ausführungen ist die Ermittlung des Verlaufes des zu übertragenden Momentes und der Schubspannung über die Nabenlänge. Beides basiert im Wesentlichen auf dem in [3] dargestellten Modell.

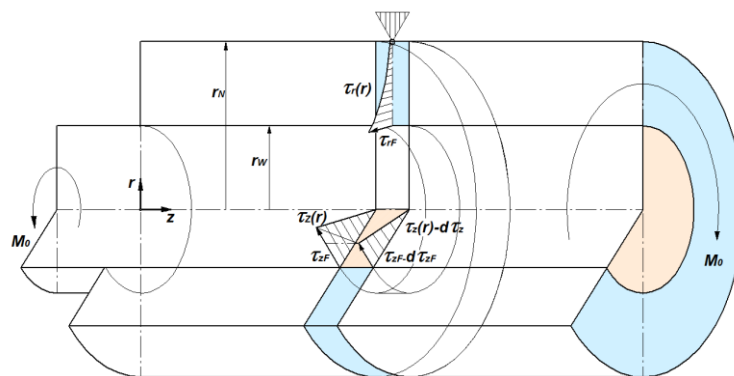
0.2 Zeichen, Symbole und Erläuterungen

$G_W [N/mm^2]$	Gleitmodul der Welle	Shear modulus of shaft
$G_N [N/mm^2]$	Gleitmodul der Nabe	Shear modulus of hub / boss
$r [mm]$	Variabler Radius Für Welle $r_B \leq r \leq r_W$, für Nabe $r_W \leq r \leq r_N$	Variable radius For shaft $r_B \leq r \leq r_F$, for hub $r_F \leq r \leq r_N$
$r_N [mm]$	Außenradius der Nabe	Outside radius of the hub
$r_F [mm]$	Fugendurchmesser $r_F = r_W$ Außenradius der Welle in der Nabe	Outside radius of the shaft
$r_W [mm]$	Außenradius der Welle $r_W = r_F$	Outside radius of the shaft
$r_B [mm]$	Innenradius der Welle / Hohlwelle $0 \leq r_B < r_W$	inside radius of the shaft
$W_t [mm^3]$	Widerstandsmoment für Torsion der Welle	Section modulus of resistance of the shaft
$Q_N [-]$	Radienverhältnis der Nabe $Q_N = r_W/r_N < 1$	Relation of radii
$Q_W [-]$	Radienverhältnis der Welle $Q_W = r_B/r_W < 1$	Relation of radii
$\alpha [-]$	Faktor für Hohlwelle $\alpha = (1 - r_B^4/r_W^4) = (1 - Q_W^4)$	Factor for hollow shaft
$l [mm]$	Nabenlänge	Length of the hub / boss
$z [mm]$	Längenkoordinate $0 \leq z \leq l$	length coordinate $0 \leq z \leq l$
$\zeta [mm]$	Dimensionslose Längenkoordinate $\zeta = z/l$	Dimensionless length coordinate $\zeta = z/l$
$r [mm]$	Radius - radiale Koordinate	Radius - radial coordinate
$z_R [mm]$	Übergang von Rutschen in gemeinsame Verdrehung	Changeover point in the joint twisting
$\zeta_G [mm]$	Dimensionslose Koordinate z_R	Dimensionless length coordinate of joint twisting
$M_0 [Nmm]$	Gesamtes zu übertragendes gesamtes Torsionsmoment	Total transmitted torsional moment
$M(z) [Nmm]$	Drehmoment / allgemein für $0 \leq z \leq l$	Complete Torsional moment / general
$M_W(z) [Nmm]$	Drehmoment auf Wellenseite in der Pressfuge	Torsional moment of the side of the shaft
$M_N(z) [Nmm]$	Drehmoment auf der Nabenseite in der Pressfuge	Torsional moment of side of the hub
$M_F(z) [Nmm]$	Drehmoment in der Pressfuge	Torsional moment in the press joint
$M_V [Nmm]$	Moment, das durch Reibung übertragen wird und bei dem die Oberflächen zu einander verschoben werden	moment while transfer by friction- when the surfaces of shaft and hub twist against
$M_G [Nmm]$	Moment, das ohne eine Oberflächenverschiebung zwischen Welle und Nabe übertragen wird	moment - joint twisting of the surfaces of shaft and hub
$p [N/mm^2]$	Flächenpressung in der Fuge	Contact pressure in the pressure joint
$S [-]$	Formale Sicherheit: $S [-] = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_F^2 \cdot l \cdot p_F}{M_0} \geq 1$	Formal safety
$\tau [N/mm^2]$	Schubspannung / allgemein	Shear stress / general
$\tau_m = \tau_0 \left[\frac{N}{mm^2} \right]$	Mittlere Schubspannung in der Pressfuge	Mean shear stress
$\tau_r(r, z) [N/mm^2]$	Radiale Schubspannung	Radial shear stress
$\tau_z(r, z) [N/mm^2]$	axiale Schubspannung	Axial shear stress
$\tau_W(z) [N/mm^2]$	Radiale Schubspannung der Welle in der Pressfuge	Shear stress of the shaft in the press joint
$\tau_N(z) [N/mm^2]$	Radiale Schubspannung der Nabe in der Pressfuge	Shear stress of the hub in the press joint
$\tau_F(z) [N/mm^2]$	Radiale Spannung in der Pressfuge	Shear stress in the press joint
$p [N/mm^2]$	Pressung in der Trennfuge	Pressure in the press joint

$\mu[-]$	Reibfaktor	Friction coefficient
$\gamma(z) [rad]$	Axialer Verdrehwinkel / allgemein	Axial angle of torsion / general
$\gamma_W(z) [rad]$	Axialer Verdrehwinkel der Welle in der Pressfuge	Axial angle of torsion of the shaft
$\gamma_N(z) [rad]$	Axialer Verdrehwinkel der Nabe in der Pressfuge	Axial angle of torsion the hub
$\varphi(z) [rad]$	Radialer Verdrehwinkel / allgemein	Radial torsional angle / general
$\varphi_W(z) [rad]$	Radialer Verdrehwinkel der Welle in der Pressfuge	Radial torsional angle of shaft in the press joint
$\varphi_N(z) [rad]$	Radialer Verdrehwinkel der Nabe in der Pressfuge	Radial torsional angle of hub in the press joint
$u [mm]$	Radiale Verdrehung der Nabe	Torsion of the hub
$U [N]$	Umfangskraft in der Pressfuge	Tangential force in the press joint
$\gamma[-]$	Exponent zur Lösung der Dgl.	Exponent for solution the diff. equation
A	Integrationskonstante	Constant
B	Integrationskonstante	Constant
C	Konstante	Constant of integration
Indices		
F	Pressfuge	Press joint
W	Nabe	shaft
N	Welle	Hub / boss
t	Torsion	Torsion
r	radial	radial
z	axial	axial
m	mittel	mean
G	Gegeneinander Verdrehen der Oberflächen in der Pressfuge	Against twist of the surfaces
V	Gemeinsames Veredhen der Oberflächen in der Pressfuge	Joint twist of the surfaces

Nicht angegebene Bezeichnungen sind in den folgenden Ausführungen erklärt!
 No specified symbols are explained in the following statement!

*Schematische Darstellung des Modells einer Pressverbindung zur die Übertragung eines Drehmomentes **



**) Zur Übersichtlichkeit ohne Darstellung der Innenbohrung der Welle*

1. Für die Übertragung Drehmomentes in einer Welle gilt allgemein
 (Welle ohne Nabe):

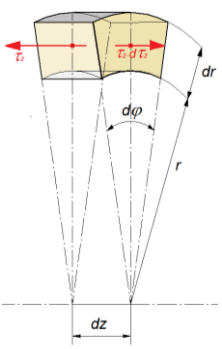
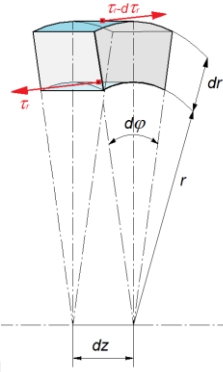
Gl.

Schubspannung am Außendurchmesser der Welle (Ebene senkrecht zur z-Achse) ¹⁾	$\tau_{zW} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_0}{\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{r_B^4}{r_W^4}\right) r_W^3} = \frac{M_0}{\frac{\pi}{2} \alpha \cdot r_W^3}$	1.01
Gl 1.01 umstellen \curvearrowright	$M_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha \cdot r_W^3 \cdot \tau_{zW}$	1.02
Zusammenhang Schubspannung, Verformung, Materialkenngröße ¹⁾	$\tau_{zW} = \gamma_W \cdot G_W$	1.03
Geometrische Zusammenhang von axialer und radialer Verformung ¹⁾	$\gamma_W \cdot z = \varphi_W \cdot r_F$	1.04
aus Gl. 1.03 \curvearrowright	$\gamma_W = \frac{\varphi_W \cdot r_F}{z}$	1.05
Gl. 1.05 in Gl. 1.03 \curvearrowright	$\tau_{zW} = M_0 \cdot \frac{2}{\pi \cdot \alpha \cdot r_W^3} = \gamma_W \cdot G_W = \frac{\varphi_W \cdot r_W}{z} \cdot G_W$	1.06
Gl. 1.06 in Gl.1.0 2 \curvearrowright	$\varphi_W = M_0 \cdot \frac{2}{\pi \cdot \alpha \cdot r_W^4} \cdot \frac{z}{G_W}$	1.07
Gl. 1.07 differenzieren \curvearrowright	$\frac{d\varphi_W}{dz} = M_0 \cdot \frac{2}{\pi \cdot \alpha \cdot r_W^4} \cdot \frac{1}{G_W}$	1.08
GL. 1.08 umstellen \curvearrowright	$M_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha \cdot r_W^4 \cdot G_W \cdot \frac{d\varphi_W}{dz}$	1.09
Gl.1.0 2 und Gl. 1.09 gleichsetzen \curvearrowright	$\frac{d\varphi_W}{dz} = \frac{\tau_{zW}}{G_W \cdot r_W}$	1.10
Axiale Schubspannung in der Welle <u>ohne</u> Nabe ¹⁾	$\tau_{zW}(r) = \frac{r}{r_W} \cdot \tau_{zW}(r_W)$	1.11
Radiale Schubspannung in der Welle <u>ohne</u> Nabe für $r_B \leq r \leq r_W$ ¹⁾	$\tau_{rW}(r) = 0$	1.12
		1.13

¹⁾ Allgemein bekannt aus der Festigkeitslehre

2. Was passiert mit der Welle, wenn von der Welle auf die Nabe mittels Pressung ein Moment über die Nabelänge l im Bereich $0 \leq z \leq l$ eingeleitet wird?		Gl.
Annahme: Die Welle wird hierbei als aus differenziellen Scheibenelementen der Breite dz zusammengesetzt betrachtet.		2.01
Für den Bereich der Pressung $0 \leq z \leq l$ gilt Wellendurchmesser gleich Pressfugendurchmesser	$r_W = r_F$	2.02
Übertragenes differenzielles Moment an der Stelle z	$dM_W(z) = -2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot \tau_{rF} \cdot dz$	2.03
Übertragende differenzielle Umfangskraft an der Stelle z	$dU_F(z) = -2 \cdot \pi \cdot r_W \cdot \tau_{rF}(z) \cdot dz$	2.04
Umstellen der Gl.2.03	$\frac{dM_W(z)}{dz} = -2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot \tau_r(r_W)$	F12 2.05
Integrieren der Gl. 2.05: Bis zur Schnittstelle z von der Welle auf die Nabe in der Pressfuge übertragenes Moment	$M_W(z) = M_0 - \int_0^z 2 \cdot \pi \cdot r_F^2 \cdot \tau_{rF} \cdot dz = M_N(z)$	2.06
Randbedingungen	$z = l : M_z = 0$ und $\tau_{rF} = 0$	2.07
Verdrehung von Welle und Nabe sind in der Pressfuge gleich	$\frac{d\varphi_N}{dz} = \frac{d\varphi_W}{dz} = \frac{d\varphi_F}{dz}$	2.08
Die radialen Schubspannungen von Welle und Nabe sind in der Pressfuge gleich (Zylinderebene: radial zur z-Achse)	$\tau_{rW}(r_W) = -\tau_{rN}(r_W) = \tau_{rF}$	2.09
		2.10

3. Betrachtung der Verbindung von Welle und Nabe bei der Momentübertragung, die gekoppelt sind durch die Pressung in der Fuge		
Annahme 1: Die Welle und Nabe werden hierbei als aus differenziellen Scheibenelementen der Breite dz zusammengesetzt betrachtet.		3.01
Annahme 2: Zwischen den Scheibenelementen der Nabe werden <u>keine</u> axialen Schubspannungen $\tau_{zN}(r, z)$ übertragen. Es besteht keine direkte Kopplung zwischen den Scheibenelementen.		3.02
Annahme 3: Die Scheibenelemente der Nabe sind am Außenradius abgestützt, so dass das eingeleitete Moment $dM_N(z)$ dort aufgenommen wird bzw. erst dort in axialer Richtung weitergeleitet wird. Hiermit ist eine indirekte Kopplung der Scheibenelemente gegeben.		3.03
Bemerkung: Da das Ziel die Ermittlung der Schubspannung $\tau_W(z) = \tau_N(z) = \tau_F(z)$ ist und diese im Pressfugenbereich liegt, sind die Annahmen akzeptabel. Die Annahmen eignen sich nicht für die Ermittlung von Schubspannungen in der Nabe in		3.04

	einem größeren Abstand vom Pressfugenradius, da dann mit axialen Schubspannungen in der Nabe zu rechnen ist, weil dann ein Zusammenhang zwischen den Scheiben für die axiale Weiterleitung des Momentes notwendig wird.		
			
Axiale Schubspannung in der Welle	Radiale Schubspannung in der Nabe		
Gesucht ist die Schubspannung am Umfang in der Pressfuge	$\tau_r(r_W, z) = \tau_W(z) = \tau_N(z) = \tau_F(z)$		3.05
Infolge Momentübertragung in der Pressfuge gilt:	$\tau_r(r_F, z) \neq 0$		3.06
Auf ein Scheibenelement in der Pressfuge übertragenes Moment (Abfall des Drehmomentes in der Welle)	$dM_N(z) = dM_W(z) = dM_F(z) = 2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot \tau_r(r_W, z) \cdot dz$		3.07
Umstellen der Gl. 3.07 ↷	$\frac{dM_N(z)}{dz} = \frac{dM_W(z)}{dz} = \frac{dM_F(z)}{dz} = 2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot \tau_r(r_W, z)$		3.08
Gl. 1.11 differenziert axialen Schubspannungen der <u>Welle</u> sind ¹⁾	$\frac{d\tau_z(r)}{dz} = \frac{r}{r_W} \cdot \frac{d\tau_z(r_W)}{dz}$	F15	3.09
Die Momentabnahme in einem Ring der Dicke dr und der Breite dz eines Scheibenelementes der <u>Welle</u> über den Radius r in z-Richtung ist	$d\left(\frac{dM(r)}{dz}\right) = -2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot \frac{d\tau_z(r, z)}{dz} \cdot r$		3.10
Gleichung 3.09 eingesetzt in 3.10	$d\left(\frac{dM(r)}{dz}\right) = -2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot \left(\frac{r}{r_W} \cdot \frac{d\tau_z(r_W, z)}{dz}\right) \cdot r$		3.11
Integration der Gl. 3.10 Momentabnahme 0 bis r in einem Scheibenelement der Welle	$\frac{dM(r, z)}{dz} = -\int_{r_B}^r \frac{2 \cdot \pi}{r_W} \cdot \frac{d\tau_z(r_W, z)}{dz} \cdot r^3 \cdot dr$		3.12
	$\frac{dM(r, z)}{dz} = -\frac{2 \cdot \pi}{r_W} \cdot \frac{d\tau_z(r_W, z)}{dz} \cdot \frac{(r^4 - r_B^4)}{4}$	F16	3.13
Änderung in axialer Richtung	$dM(r, z) = -\frac{2 \cdot \pi}{r_W} \cdot \frac{d\tau_z(r_W, z)}{dz} \cdot \frac{(r^4 - r_B^4)}{4} \cdot dz$		3.14
Änderung in radialer Richtung	$dM(r, z) = -2 \cdot \pi \cdot r^2 \tau_r(r, z) \cdot dz$		3.15
Bilanz: Gl. 3.14 = Gl. 3.15 Was bei der Weiterleitung des Momentes in z-Richtung, das (axial) verloren geht, findet sich wieder in der r-Richtung (radial)	$-\frac{2 \cdot \pi}{r_W} \cdot \frac{d\tau_z(r_W, z)}{dz} \cdot \frac{(r^4 - r_B^4)}{4} = -2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \tau_r(r, z)$		3.16
Umstellen von Gl. 3.16	$\tau_r(r, z) = -\frac{1}{r_W \cdot r^2} \cdot \frac{(r^4 - r_B^4)}{4} \cdot \frac{d\tau_z(r_W, z)}{dz}$		3.17
In der Pressfuge ist, wenn $r = r_W$	$\tau_{rN}(r_W, z) = -\frac{\alpha \cdot r_F}{4} \cdot \frac{d\tau_{zW}(r_W, z)}{dz}$	F17	3.18
			3.19
Die Änderung der Verdrehungen von Welle und Nabe sind in der Pressfuge gleich	$\frac{d\varphi_W(r_W, z)}{dz} = \frac{d\varphi_N(r_W, z)}{dz}$		3.20
Die radialen Schubspannungen von Welle und Nabe sind in der Trennfugen gleich	$\tau_{rW}(r_W, z) = \tau_{rN}(r_W, z)$		3.21
Der Drehmomentabfall in der Welle ist gleich dem Drehmoment im Scheibenelement in der Nabe	$dM_N(z) = dM_W(z)$		3.22
Analog Gl. 1.02 $[\tau_z(r_F) = \frac{M_z}{W_t}]$ ist	$M_W(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha \cdot r_W^3 \cdot \tau_z(r_W, z)$		3.23
Analog Gl. 1.03 ist	$\tau_{zW}(r_W, z) = \gamma(r_W, z) \cdot G_W$		3.24

Analog Gl. 1.04 ist	$\gamma(r_W, z) \cdot dz = d\varphi_W(r_W, z) \cdot r_W$	3.25
Analog Gl. 1.06 ist	$\tau_{zW}(r_W, z) = G_W \cdot r_W \cdot \frac{d\varphi_W(r_W, z)}{dz}$	3.26
Gl. 3.23 und Gl. 3.26 Momentverlauf in der Welle	$M_W(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha \cdot r_W^4 \cdot G_W \cdot \frac{d\varphi_W(z)}{dz}$	3.27
Verdrehung der Welle am Außendurchmesser	$\frac{d\varphi_W(z)}{dz} = \frac{d\varphi(r_W, z)}{dz}$	3.28
Gl. 3.28 in Gl. 3.27 Verdrehung der Welle	$\frac{d\varphi_W(z)}{dz} = M_W(z) \cdot \frac{2}{\pi \cdot \alpha \cdot r_W^4 \cdot G_W}$	3.29
\curvearrowright	$d\varphi_W(z) = M_W(z) \cdot \frac{2}{\pi \cdot \alpha \cdot r_W^4 \cdot G_W} \cdot dz$	3.30

4. Was passiert in der Nabe?		
In das Scheibenelement der Dicke dz an der Pressfuge eingeleitetes Moment	$\frac{dM_N(r_W, z)}{dz} = 2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot \tau_r(r_W, z)$	4.01
Für die Nabe ($r_W \leq r \leq r_N$) ist mit den Annahmen 1. bis 3. für jeden radialen Zylinderschnitt des Scheibenelements das durchgeleitete Moment gleich bis zum Außendurchmesser	$\frac{dM_N(r_W, z)}{dz} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \tau_r(r, z)$	4.02
Für die Nabe gilt dann entsprechend Annahme (Gl. 3.07)	$\frac{dM_N(r_W, z)}{dz} = \frac{dM_N(r, z)}{dz} = \frac{dM_N(z)}{dz}$	4.03
Aus Gl. 4.01 und Gl. 4.02 ergibt sich damit:	$\tau_r(r, z) = \frac{r_W^2}{r^2} \cdot \tau_r(r_W, z)$	4.04
Aus Gl. 4.04 ergibt sich Schubspannung am Außenrand r_a des Scheibenelementes der Nabe	$\tau_r(r_W, z) = \frac{r_W^2}{r_N^2} \cdot \tau_r(r_N, z)$	4.05

5. Ermittlung des Momentverlaufs und der Schubspannung in der Pressfuge für $0 \leq z \leq l$		
Die Verdrehweg der Nabe ($r_W \leq r \leq r_N$)	$du_N(r, z) = r \cdot d\varphi(r, z)$	5.01
	$\frac{du_N(r, z)}{dr} = \frac{\tau_r(r, z)}{G_N}$	5.02
Gl. 5.01 und Gl. 5.02	$d\varphi(r, z) = \frac{\tau_r(r, z)}{G_N} \cdot \frac{dr}{r}$	5.03
Gl. 4.05 und Gl. 5.03 Die Verdrehwinkel der Nabe ($r_N \leq r \leq r_W$)	$d\varphi(r, z) = \frac{\tau_r(r_W, z) \cdot r_W^2}{G_N} \cdot \frac{dr}{r^3}$	5.04
Gl. 5.04 Integration von r_W bis r und $r_W \leq r \leq r_N$ ergibt die Verdrehung zwischen r_W und r	$\varphi_N(r, z) = -\frac{\tau_r(r_W, z) \cdot r_W^2}{2 \cdot G_N} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_W^2} \right)$	5.05
	$\varphi_N(r, z) = \frac{\tau_r(r_W, z)}{2 \cdot G_N} \cdot \left(1 - \frac{r_W^2}{r^2} \right)$	F59 5.06
Gl. 5.06 für $r = r_N$ Gesamtverdrehung zwischen Innen- und Außendurchmesser der Nabe (zwischen r_W und r_N)	$\varphi_N(z) = \frac{\tau_r(r_W, z)}{2 \cdot G_N} \cdot \left(1 - \frac{r_W^2}{r_N^2} \right)$	5.07
Gl. 5.07 und Gl. 4.01	$\varphi_N(z) = \frac{\left(1 - \frac{r_W^2}{r_N^2} \right)}{2 \cdot G_N} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2} \cdot \left(\frac{dM_N(z)}{dz} \right)$	5.08

Differenzieren von Gl.5.07 nach dz ergibt	$\frac{d\varphi_N(z)}{dz} = \frac{\left(1 - \frac{r_W^2}{r_N^2}\right)}{2 \cdot G_N} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2} \cdot \left(\frac{d^2 M_N(z)}{dz^2}\right)$	5.09
Gl. 5.09 mit Gl. 3.29 und Gl. 2.02 ergibt sich $\left\langle \frac{d\varphi_N(z)}{dz} = M_W(z) \cdot \frac{2}{\pi \cdot \alpha \cdot r_W^4 \cdot G_W}, \alpha = (1 - Q_W^4) \right\rangle$	$M_W(z) \cdot \frac{2}{\pi \cdot \alpha \cdot r_W^4 \cdot G_W} = \frac{\left(1 - \frac{r_W^2}{r_N^2}\right)}{2 \cdot G_N} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2} \cdot \left(\frac{d^2 M_N(z)}{dz^2}\right)$	5.10
In der Pressfuge gilt	$dM_W(z) = dM_N(z)$	5.11
Gl.5.11 umgeformt ergibt die Differentialgleichung (Dgl.) mit $Q_N^2 = \frac{r_W^2}{r_N^2}, \alpha = 1 - Q_W^4$	$\frac{d^2 M_W(z)}{dz^2} = \frac{8}{(1 - Q_W^4) \cdot r_W^2} \cdot \frac{G_N}{G_W} \cdot \frac{1}{(1 - Q_N^2)} \cdot M_W(z)$	5.12
Zur besseren Darstellung und Auswertung von Ergebnissen wird die Dgl. umgestellt auf eine dimensionslos Dgl.		
Einführung der dimensionslosen Längenkoordinate	$\zeta = \frac{z}{l}$	5.13
Einführung des dimensionslosen Momentes	$m_W(\zeta) = \frac{M_W(\zeta)}{M_0}$	5.14
	$\frac{d^2 m_W(z)}{d\zeta^2} = \frac{l^2}{(1 - Q_W^4) \cdot r_W^2} \cdot \frac{G_N}{G_W} \cdot \frac{8}{(1 - Q_N^2)} \cdot m_W(\zeta)$	5.15
Konstante (Zusammenfassung der Kennwerte für Material und Geometrie)	$C = \frac{l^2}{r_W^2} \cdot \frac{G_N}{G_W} \cdot \frac{8}{(1 - Q_W^4) \cdot (1 - Q_N^2)}$	5.16
Die Parameter $\frac{l}{r_F}, \frac{r_F}{r_a}, \frac{G_N}{G_W}, Q_W, Q_N$ sind entscheidend für den Lösungsverlauf und dessen Darstellung		
	$\frac{d^2 m_W(\zeta)}{d\zeta^2} = C \cdot m_W(\zeta)$	5.17
Lösungsansatz	$m_W(\zeta) = e^{\lambda \cdot \zeta}$	5.18
Lösung der Gleichung	$\lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot \zeta} = C \cdot e^{\lambda \cdot \zeta}$	5.19
Exponent	$\lambda = \pm \sqrt{C}$	5.20
Randbedingung	$m_W(\zeta = 0) = 1$	5.20
Randbedingung	$m_W(\zeta = 1) = 0$	5.21
Dimensionsloses Moment	$m_W(\zeta) = A \cdot e^{\zeta \cdot \sqrt{C}} - B \cdot e^{-\zeta \cdot \sqrt{C}}$	5.22
	$1 = A - B$	5.23
	$0 = A \cdot e^{\sqrt{C}} - B \cdot e^{-\sqrt{C}}$	5.24
	$B = A - 1$	5.25
	$0 = A \cdot e^{\sqrt{C}} - (A - 1) \cdot e^{-\sqrt{C}}$	5.26
	$A \cdot (e^{\sqrt{C}} - e^{-\sqrt{C}}) + e^{-\sqrt{C}} = 0$	5.27
	$A = -\frac{1}{e^{+2 \cdot \sqrt{C}} - 1}$	5.28
	$B = -\frac{1}{1 - e^{-2 \cdot \sqrt{C}}}$	5.29
	$m_W(\zeta) = -\frac{e^{\zeta \cdot \sqrt{C}}}{e^{+2 \cdot \sqrt{C}} - 1} + \frac{e^{-\zeta \cdot \sqrt{C}}}{1 - e^{-2 \cdot \sqrt{C}}}$	5.30
	$m_W(\zeta) = A \cdot e^{\zeta \cdot \sqrt{C}} - B \cdot e^{-\zeta \cdot \sqrt{C}}$	5.31
Probe $m(\zeta = 0) = 1$	$1 = -\frac{1}{e^{+2 \cdot \sqrt{C}} - 1} + \frac{1}{1 - e^{-2 \cdot \sqrt{C}}} = \frac{-2 + e^{+2 \cdot \sqrt{C}} + e^{-2 \cdot \sqrt{C}}}{-2 + e^{+2 \cdot \sqrt{C}} + e^{-2 \cdot \sqrt{C}}}$	5.32
Probe $m(\zeta = 1) = 0$	$0 = -\frac{e^{\sqrt{C}}}{e^{+2 \cdot \sqrt{C}} - 1} + \frac{e^{-\sqrt{C}}}{1 - e^{-2 \cdot \sqrt{C}}} = \frac{-e^{\sqrt{C}} + e^{-\sqrt{C}} + e^{\sqrt{C}} - e^{-\sqrt{C}}}{(e^{+2 \cdot \sqrt{C}} - 1)(1 - e^{-2 \cdot \sqrt{C}})}$	5.33

6. Ermittlung der radialen Schubspannung und des Verdrehwinkels in der Pressfuge		
	$M_W(\zeta) = m_W(\zeta) \cdot M_0$	6.01
		6.02
	$\frac{dM_W}{dz} = \frac{1}{l} M_0 \cdot \sqrt{C} \cdot \left(A \cdot e^{+\frac{z}{l} \sqrt{C}} + B \cdot e^{-\frac{z}{l} \sqrt{C}} \right)$	6.03
	$\frac{dM_W}{dz} = -2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot \tau_r(r_W, z)$	6.04
	$\tau_r(r_W, z) = -\frac{M_0}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l} \cdot \sqrt{C} \cdot \left(A \cdot e^{+\frac{z}{l} \sqrt{C}} + B \cdot e^{-\frac{z}{l} \sqrt{C}} \right)$	6.05

Mittlere radiale Schubspannung in Pressfuge	$\tau_m = \frac{M_0}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l}$	6.06
	$\tau_r^*(z) = \frac{\tau_r(r_W, z)}{\tau_m}$	6.07
Dimensionslose radiale Schubspannung in der Pressfuge	$\tau_r^*(z) = \frac{\tau_r(r_W, z)}{\tau_m} = -\sqrt{C} \cdot (A \cdot e^{\frac{z}{l} \sqrt{C}} + B \cdot e^{-\frac{z}{l} \sqrt{C}})$ $\tau_r^*(\zeta) = \frac{\tau_r(r_W, \zeta)}{\tau_m} = -\sqrt{C} \cdot (A \cdot e^{\zeta \sqrt{C}} + B \cdot e^{-\zeta \sqrt{C}})$	6.08
Verdrehwinkel der Pressfuge Gl. 5.07	$\varphi_N(z) = \left(1 - \frac{r_W^2}{r_N^2}\right) \cdot \frac{\tau_r(r_W, z)}{2 \cdot G_N} = (1 - Q_N^2) \cdot \frac{\tau_r(r_W, z)}{2 \cdot G_N}$	5.07
Gl. 6.05 in Gl. 5.07	$\varphi_N(z) = \frac{(1 - Q_N^2)}{2} \cdot \frac{1}{G_N} \cdot \frac{M_0}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l} \cdot \sqrt{C} \cdot (A \cdot e^{\frac{z}{l} \sqrt{C}} + B \cdot e^{-\frac{z}{l} \sqrt{C}})$	6.10
Mit $\zeta = \frac{z}{l}$	$\varphi_N(\zeta) = \frac{(1 - Q_N^2)}{2} \cdot \frac{1}{G_N} \cdot \frac{M_0}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l} \cdot \sqrt{C} \cdot (A \cdot e^{\zeta \sqrt{C}} + B \cdot e^{-\zeta \sqrt{C}})$	6.11
Gl. 6.06 in Gl. 6.11	$\varphi_N(\zeta) = \frac{(1 - Q_N^2)}{2} \cdot \frac{\tau_m}{G_N} \cdot \sqrt{C} \cdot (A \cdot e^{\zeta \sqrt{C}} + B \cdot e^{-\zeta \sqrt{C}})$	6.12
Randwerte, Mittelwert		
$\tau_r^*(\zeta = 0) = -\sqrt{C} \cdot \left(-\frac{1}{e^{+2\sqrt{C}-1}} - \frac{1}{1-e^{-2\sqrt{C}}}\right) = -\sqrt{C} \cdot \frac{-1+e^{-2\sqrt{C}}-e^{+2\sqrt{C}}+1}{(e^{+2\sqrt{C}}-1)(1-e^{-2\sqrt{C}})} = \sqrt{C} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{C}}-e^{+2\sqrt{C}}}{-2+e^{2\sqrt{C}}+e^{-2\sqrt{C}}}$		
$\tau_r^*(\zeta = 1) = -\sqrt{C} \cdot \left(-\frac{e^{\sqrt{C}}}{e^{+2\sqrt{C}}-1} - \frac{e^{-\sqrt{C}}}{1-e^{-2\sqrt{C}}}\right) = -\sqrt{C} \cdot \frac{-1+e^{-\sqrt{C}}-e^{\sqrt{C}}+1}{(e^{+2\sqrt{C}}-1)(1-e^{-2\sqrt{C}})} = \sqrt{C} \cdot \frac{+e^{-\sqrt{C}}-e^{\sqrt{C}}}{-2+e^{-2\sqrt{C}}+e^{2\sqrt{C}}}$		
$\int_0^1 \tau_r^*(\zeta) d\zeta = -\sqrt{C} \cdot \int_0^1 \left(-\frac{e^{\zeta \sqrt{C}}}{e^{+2\sqrt{C}}-1} - \frac{e^{-\zeta \sqrt{C}}}{1-e^{-2\sqrt{C}}}\right) \cdot d\zeta = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}} \cdot \left(-\frac{e^{\zeta \sqrt{C}}}{e^{+2\sqrt{C}}-1} + \frac{e^{-\zeta \sqrt{C}}}{1-e^{-2\sqrt{C}}}\right)_0^1 = -\frac{1}{-2+e^{-2\sqrt{C}}+e^{2\sqrt{C}}} \cdot (0 - (-2 + e^{-2\sqrt{C}} + e^{2\sqrt{C}})) = -1$		

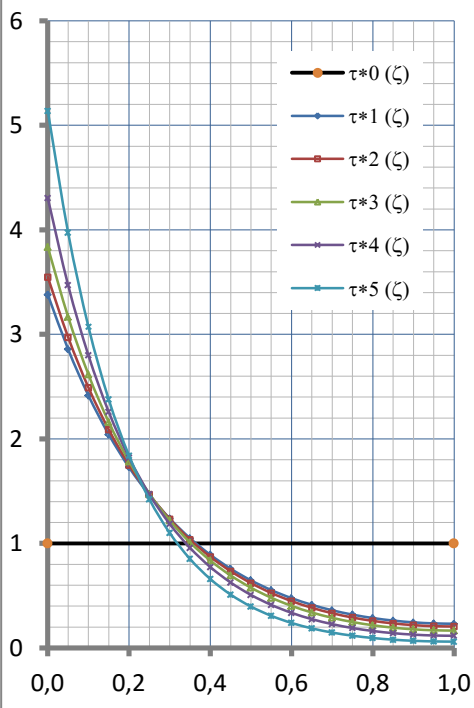
7. Wesentliche Gleichungen zur Beschreibung der Situation in der Pressfuge		
Dimensionsloses Moment, das in der Pressfuge übertragen wird	$m_W(\zeta) = A \cdot e^{\zeta \sqrt{C}} - B \cdot e^{-\zeta \sqrt{C}}$	5.22
Dimensionslose radiale Schubspannung	$\tau_r^*(\zeta) = -\sqrt{C} \cdot (A \cdot e^{\zeta \sqrt{C}} + B \cdot e^{-\zeta \sqrt{C}})$	6.08
Verdrehwinkel in der Pressfuge	$\varphi_N(\zeta) = \frac{(1 - Q_N^2)}{2} \cdot \frac{\tau_m}{G_N} \cdot \sqrt{C} \cdot (A \cdot e^{\zeta \sqrt{C}} + B \cdot e^{-\zeta \sqrt{C}})$	6.12
Konstanten	$A = -\frac{1}{e^{+2\sqrt{C}}-1}, B = -\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{C}}}, C = \frac{l^2}{(1-Q_N^2) \cdot r_W^2} \cdot \frac{G_N}{G_W} \cdot \frac{8}{(1-Q_N^2)}$	---
Mittlere Schubspannung	$\tau_m = \frac{M_0}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l} = \frac{M_0}{2 \cdot \pi \cdot l^3} \cdot \frac{l^2}{r_W^2}$	6.06
Proportionalität	$\varphi_N(\zeta) \sim \tau_r^*(\zeta)$	

Beispiel ▼

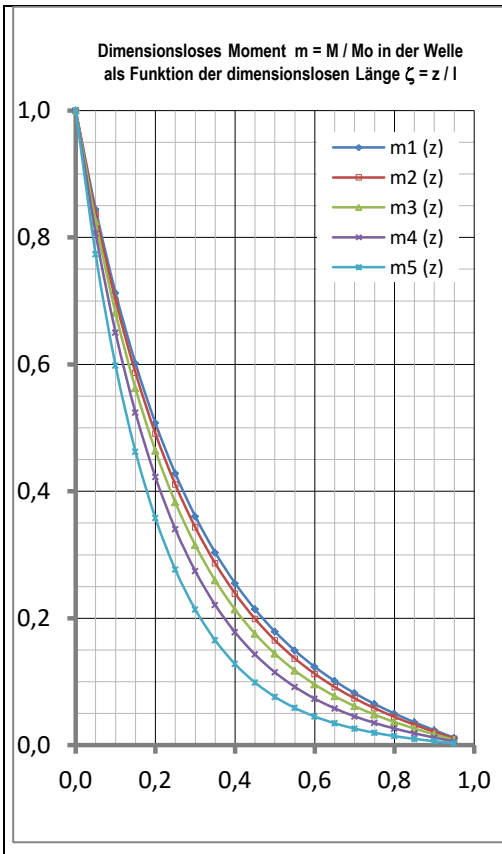
Beispiel (kein Rutschen in der Pressfuge)			Varianten 1...5				
Vorgabe			1	2	3	4	5
Außenradius der Nabe	r_N [mm]		120	120	120	120	120
Außenradius der Welle	r_W [mm]		60	70	80	90	100
Innenradius der Welle	r_B [mm]		30	30	30	30	30
Länge der Nabe	l [mm]		120	120	120	120	120
Material der Nabe	.-.		St	St	St	St	St

Material der Welle	.-.		St	St	St	St	St
Gleitmodul der Nabe	G_N [N/mm ²]		79.300	79.300	79.300	79.300	79.300
Gleitmodul der Welle	G_W [N/mm ²]		79.300	79.300	79.300	79.300	79.300
Berechnungskonstanten							
Radienverhältnis	Q_N [-]	r_W / r_N	0,5000	0,5833	0,6667	0,7500	0,8333
Radienverhältnis	Q_W [-]	r_B / r_W	0,5000	0,4286	0,3750	0,3333	0,3000
Längenverhältnis	l / r_F [-]	l / r_W	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Gleitmodulverhältnis	G_N / G_W [-]	G_N / G_W	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Exponentkonstante	\sqrt{C} [-]		3,373	3,543	3,833	4,303	5,138
Integrationskonstante	A [-]	$-.1/(e^{2\sqrt{C}}-1)$	-1,18E-03	-8,382E-04	-4,689E-04	-1,831E-04	-3,447E-05
Integrationskonstante	B [-]	$-.1(1-e^{-2\sqrt{C}})$	-1,0012E+00	-1,0008E+00	-1,0005E+00	-1,0002E+00	-1,0000E+00

Dimensionslose Schubspannung τ
als Funktion der dimensionslosen
Längenkoordinate $\zeta=z/l$



ζ [-]	$\tau^*_1(\zeta)$	$\tau^*_2(\zeta)$	$\tau^*_3(\zeta)$	$\tau^*_4(\zeta)$	$\tau^*_5(\zeta)$
0,00	3,3810	3,5485	3,8364	4,3044	5,1380
0,05	2,8576	2,9735	3,1680	3,4715	3,9741
0,10	2,4157	2,4921	2,6164	2,8000	3,0740
0,15	2,0427	2,0891	2,1611	2,2585	2,3777
0,20	1,7279	1,7518	1,7855	1,8220	1,8393
0,25	1,4624	1,4696	1,4756	1,4701	1,4229
0,30	1,2385	1,2336	1,2200	1,1865	1,1009
0,35	1,0500	1,0364	1,0095	0,9581	0,8519
0,40	0,8914	0,8718	0,8361	0,7742	0,6595
0,45	0,7583	0,7347	0,6935	0,6262	0,5108
0,50	0,6467	0,6206	0,5764	0,5074	0,3960
0,55	0,5536	0,5261	0,4806	0,4121	0,3075
0,60	0,4763	0,4481	0,4025	0,3360	0,2394
0,65	0,4126	0,3842	0,3392	0,2754	0,1872
0,70	0,3606	0,3324	0,2884	0,2277	0,1474
0,75	0,3189	0,2911	0,2483	0,1906	0,1173
0,80	0,2863	0,2589	0,2172	0,1623	0,0951
0,85	0,2618	0,2349	0,1942	0,1416	0,0792
0,90	0,2449	0,2182	0,1784	0,1274	0,0685
0,95	0,2349	0,2084	0,1691	0,1192	0,0623
1,00	0,2316	0,2052	0,1660	0,1165	0,0603



$\zeta [-]$	$m_1(\zeta)$	$m_2(\zeta)$	$m_3(\zeta)$	$m_4(\zeta)$	$m_5(\zeta)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	0,8444	0,8374	0,8254	0,8063	0,7734
0,10	0,7129	0,7011	0,6813	0,6502	0,5982
0,15	0,6017	0,5869	0,5622	0,5242	0,4627
0,20	0,5076	0,4911	0,4638	0,4226	0,3578
0,25	0,4281	0,4108	0,3825	0,3406	0,2767
0,30	0,3607	0,3434	0,3154	0,2744	0,2139
0,35	0,3036	0,2868	0,2598	0,2210	0,1654
0,40	0,2552	0,2392	0,2138	0,1779	0,1278
0,45	0,2141	0,1991	0,1757	0,1430	0,0987
0,50	0,1790	0,1653	0,1440	0,1148	0,0762
0,55	0,1491	0,1367	0,1177	0,0919	0,0587
0,60	0,1234	0,1124	0,0957	0,0732	0,0451
0,65	0,1012	0,0917	0,0772	0,0580	0,0345
0,70	0,0819	0,0738	0,0615	0,0455	0,0262
0,75	0,0650	0,0583	0,0482	0,0351	0,0196
0,80	0,0499	0,0446	0,0366	0,0263	0,0143
0,85	0,0362	0,0323	0,0263	0,0187	0,0100
0,90	0,0236	0,0210	0,0170	0,0120	0,0063
0,95	0,0116	0,0103	0,0084	0,0059	0,0030
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

8. Einschätzung der Ergebnisse

Aufgrund der Annahmen ist davon auszugehen, dass die Ergebnisse von den realen Gegebenheiten abweichen. Diese Abweichungen werden jedoch nicht so groß sein, dass die mit dem Modell erreichbare Einschätzung einer Pressverbindung in Frage gestellt werden muss.

Wenn mit der im Maschinenbau üblichen "formalen" Sicherheit $1,5 < S = \frac{\mu \cdot p}{\tau_m} = \frac{\mu \cdot p}{M_0 / (2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l)} < 3$ eine Pressverbindung zur Drehmomentübertragung ausgelegt wird, ist in vielen Fällen eine Oberflächenverschiebung zwischen Welle und Nabe ($\frac{\mu \cdot p F}{\tau_{Fmax}} < 1$) in dem Teilbereich am Anfang der Nabe zu erwarten. Weiterführend ist also eine Betrachtung dieses Bereiches, in dem sich die Oberflächen von Welle und Nabe gegeneinander verschieben, erforderlich und in die Berechnung einzuführen.

Es werden sich also zwei Bereiche ergeben:

- **Bereich 1 (Index V):** Die erreichbare Schubspannung ist durch die aus dem Reibmoment resultierende Schubspannung begrenzt, mit dieser identisch, und kann diese nicht überschreiten. Die Oberflächen von Welle und Nabe verschieben sich gegeneinander. Der Momentabbau erfolgt durch eine konstante Schubspannung $\tau_F = \mu \cdot p$ in der Pressfuge.
- **Bereich 2 (Index G):** Die Schubspannung verhält sich so, wie in den vorangegangene Ausführungen (Pkt. 2-7) beschrieben. Der Bereich verkürzt sich jedoch soweit, bis die durch das Reibmoment entstehende Schubspannung das zu übertragene Moment soweit abgebaut hat, dass die Schubspannung infolge der Reibung unterschritten wird. Der Übergang zwischen den Bereichen ist durch die gleiche Schubspannungen $\tau_V = \tau_G = \mu \cdot p$ gekennzeichnet.

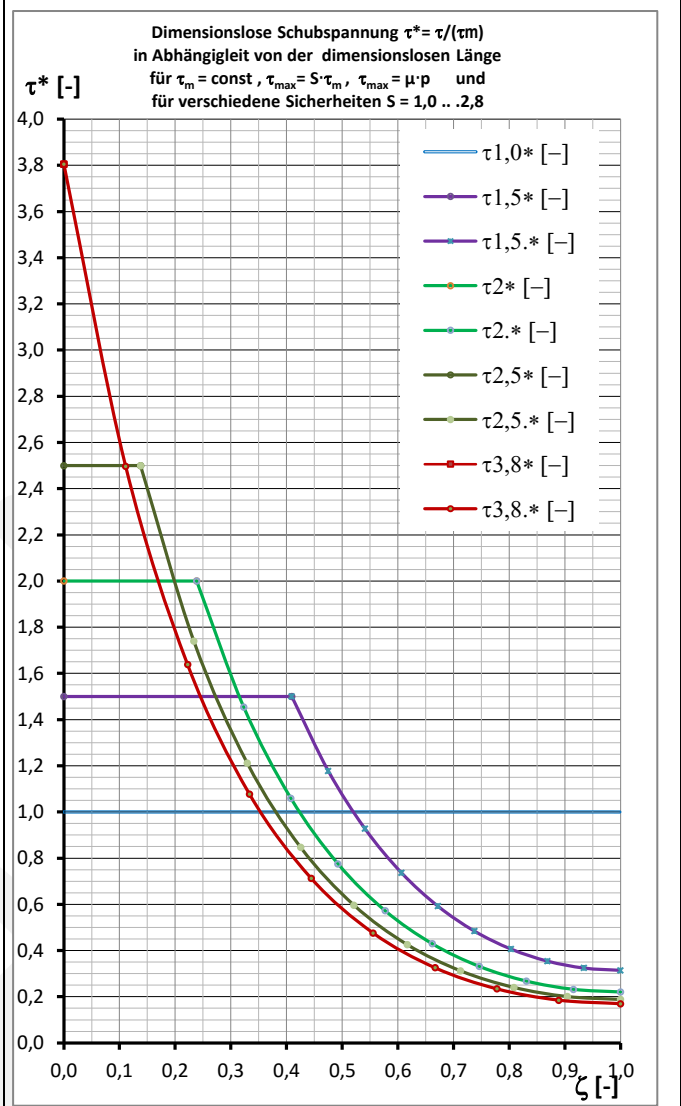
9. Wesentliche Gleichungen zur Beschreibung der Situation in der Pressfuge,

wenn eine Verschiebung der Oberflächen zwischen Welle und Nabe stattfindet			9.00
<p>Bereiche</p> <p>V: Konstante Schubspannung konstante Momentübertragung</p> <p>G: Veränderliche Schubspannung Veränderliche Momentübertragung</p>	<p>$0 \leq z \leq z_G$ konstante Momentübertragung, das Überschreiten des verfügbare Reibmomentes, Oberflächen verschieben sich gegeneinander, Rutschen</p> <p>$z_G \leq z \leq l$ veränderliche Momentübertragung, das kein Überschreiten des verfügbaren Reibmomentes, Oberflächen verschieben sich gemeinsam, kein Rutschen</p>		
Zu übertragendes Gesamtmoment Die Summe der Momente ist konstant!	$M_0 = M_V + M_G = const, \quad M_G = M_0 - M_V$		9.01
Übertragenes Moment, in dem Bereich, in dem sich die Oberflächen von Welle und Nabe sich untereinander verschieben (V) (auf einander gleiten / rutschen)	$M_V = p \cdot \mu \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot z$		9.02
Übertragenes Moment, in dem Bereich, in dem die Verschiebung der Oberflächen von Welle und Nabe gleich (G) ist (kein Gleiten, kein Rutschen)	$M_G = f(\tau_V, z)$		9.03
Mittlere Schubspannung über den Gesamtbereich	$\tau_m = \frac{-M_0}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l}$		9.04
Schubspannung in dem Bereich, in dem sich die Oberflächen von Welle und Nabe untereinander verschieben (Index V)	$\tau_V = -\mu \cdot p = const$		9.05
Schubspannung in dem Bereich, in dem sich die Oberflächen von Welle und Nabe zueinander nicht verschieben (Index G)	$\tau_G = f(\tau_V, z)$		9.06
Formale Sicherheit für Momentübertragung	$S = \frac{\tau_V}{\tau_m} = \frac{-\mu \cdot p}{-M_0 / (2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l)} = \frac{\mu \cdot p}{M_0 / (2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l)}$		9.10
Bereich unterschiedlicher Verschiebung der Oberflächen von Welle und Nabe in der Pressfuge	$0 \leq z \leq z_G$ bzw. $0 \leq \zeta \leq \zeta_G$ mit $\zeta = \frac{z}{l}$		9.11
Übertragenes Moment infolge Reibung der bewegten Oberflächen	$M_V(z) = p \cdot \mu \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot z = const$ für $0 \leq z \leq z_G$		9.12
Moment am Ende des Bereiches	$M_V(z_G) = M_G = p \cdot \mu \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot z_G$		9.13
Schubspannung infolge Reibung der bewegten Oberflächen	$\tau_V(z) = -\mu \cdot p = const$		9.14
Bedingung für Übergang zu einer gemeinsamen Verschiebung der Oberflächen	$\tau_V(z_G) = \tau_G(z_G)$ also an der Stelle $z = z_G$		9.15
Bereich der gemeinsamen Verschiebung (kein Rutschen) der Oberflächen von Welle und Nabe in der Pressfuge	$z_G \leq z \leq l$ bzw. $\zeta_G \leq \zeta \leq 1$		9.16
Mittleres zu übertragendes Moment (aus 9.01 und 9.13)	$M_{Gm}(z) = M_0 - M_V(z_V) = M_0 - \mu \cdot p \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot z_G$		9.17
Mittlere Schubspannung	$\tau_{Gm} = \frac{-M_{Gm}}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot (l - z_V)}$		9.18
	<i>Wir erinnern uns an Gl.6.05</i>	$\tau_r(r_W, z) = -\frac{M_0}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A \cdot e^{+\frac{z}{l} \sqrt{C_G}} + B \cdot e^{-\frac{z}{l} \sqrt{C_G}})$	6.05
Schubspannung im nichtgleitenden Bereichs (Analog 6.05)	$\tau_G(z) = \frac{-M_{Gm}}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot (l - z_G)} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G \cdot e^{\frac{z - z_G}{l - z_G} \sqrt{C_G}} + B_G \cdot e^{-\frac{z - z_G}{l - z_G} \sqrt{C_G}})$		9.18
Dimensionslose Schubspannung	$\bar{\tau}_G(z) = \frac{\tau_G(z)}{\tau_m} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l}{M_0} \cdot \frac{M_{Gm}}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot (l - z_G)} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G \cdot e^{\frac{z - z_G}{l - z_G} \sqrt{C_G}} + B_G \cdot e^{-\frac{z - z_G}{l - z_G} \sqrt{C_G}})$		
Dimensionslose Schubspannung (mit 9.17)	$\bar{\tau}_G(z) = -\frac{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l}{M_0} \cdot \frac{M_0 - \mu \cdot p \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot z_G}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot (l - z_V)} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G \cdot e^{\frac{z - z_G}{l - z_G} \sqrt{C_G}} + B_G \cdot e^{-\frac{z - z_G}{l - z_G} \sqrt{C_G}})$		
(analog 5.13)	$\bar{\tau}_G(z) = -\left(1 - \frac{\mu \cdot p \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l}{M_0} \cdot \zeta_G\right) \cdot \frac{1}{1 - \zeta_G} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G \cdot e^{\frac{\zeta - \zeta_G}{1 - \zeta_G} \sqrt{C_G}} + B_G \cdot e^{-\frac{\zeta - \zeta_G}{1 - \zeta_G} \sqrt{C_G}})$		9.19
Dimensionslose Schubspannung (mit 9.10)	$\bar{\tau}_G = -\frac{1 - S \cdot \zeta_G}{1 - \zeta_G} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G \cdot e^{\frac{\zeta - \zeta_G}{1 - \zeta_G} \sqrt{C_G}} + B_G \cdot e^{-1 - \zeta_G \sqrt{C_G}})$		9.20
Integrationskonstante (analog 5.16)	$C_G = \frac{(l - z_G)^2}{(1 - Q_W^2) \cdot r_W^2} \cdot \frac{G_N}{G_W} \cdot \frac{8}{(1 - Q_N^2)}$ bzw. $C_G = \frac{(1 - \zeta_G)^2}{(1 - Q_W^2)} \cdot \frac{l^2}{r_W^2} \cdot \frac{G_N}{G_W} \cdot \frac{8}{(1 - Q_N^2)}$		9.21
Konstante (analog 5.28)	$A_G = -\frac{1}{e^{+2 \cdot \sqrt{C_G}} - 1}$		9.22
Konstante (Analog 5.29)	$B_G = -\frac{1}{1 - e^{-2 \cdot \sqrt{C_G}}}$		9.23
Ermittlung der Längenkoordinate ζ_G , bei der Gleiten / Rutschen in eine gemeinsame Verdrehung Welle und Nabe übergeht			
Radiale Schubspannung in der Fuge für $\zeta = \zeta_G$	$\bar{\tau}_G = \bar{\tau}_{Rutsch} = -\frac{1 - S \cdot \zeta_G}{1 - \zeta_G} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G) = \frac{\mu \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l} = S$		9.24
	$S = -\frac{1 - S \cdot \zeta_G}{1 - \zeta_G} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G)$		
Gleichung zur Bestimmung von ζ_G durch Iteration oder mit der Gleichung 10.25 durch Vorgabe von S und ζ_G ermittelt werden	$\frac{1}{S} \cdot \zeta_G \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G) + 1 = 0$ mit $A_G, B_G, C_G = f(\zeta_G)$		9.25

(analog 5.16)	$C_G = (l - \zeta_G)^2 \cdot \left(\frac{l^2}{r_W^2} \cdot \frac{G_N}{G_W} \cdot \frac{8}{(1-Q_N^4)(1-Q_N^8)} \right)$	
Kontrollgrößen	$(A_G + B_G) = \frac{-1 + e^{-2\sqrt{C_G}} - e^{+2\sqrt{C_G}} + 1}{e^{-2\sqrt{C_G}} - 1 + e^{+2\sqrt{C_G}}} = \frac{e^{-2\sqrt{C_G}} - e^{+2\sqrt{C_G}}}{e^{-2\sqrt{C_G}} + e^{+2\sqrt{C_G}} - 2}$	
Minimale dimensionslose Schubspannung	$\bar{\tau}_{min} = -\frac{1-S\zeta_G}{1-\zeta_G} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G \cdot e^{\sqrt{C_G}} + B_G \cdot e^{-\sqrt{C_G}})$	9.26
Mittlere dimensionslose Schubspannung	$\bar{\tau}_m = 1$	9.27
Maximale dimensionslose Schubspannung	$\bar{\tau}_{max} = -\frac{1-S\zeta_G}{1-\zeta_G} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G) = S$ mit $S = \frac{\mu \cdot p}{M_0 / (2 \cdot \pi \cdot r_W^2 \cdot l)}$	9.28

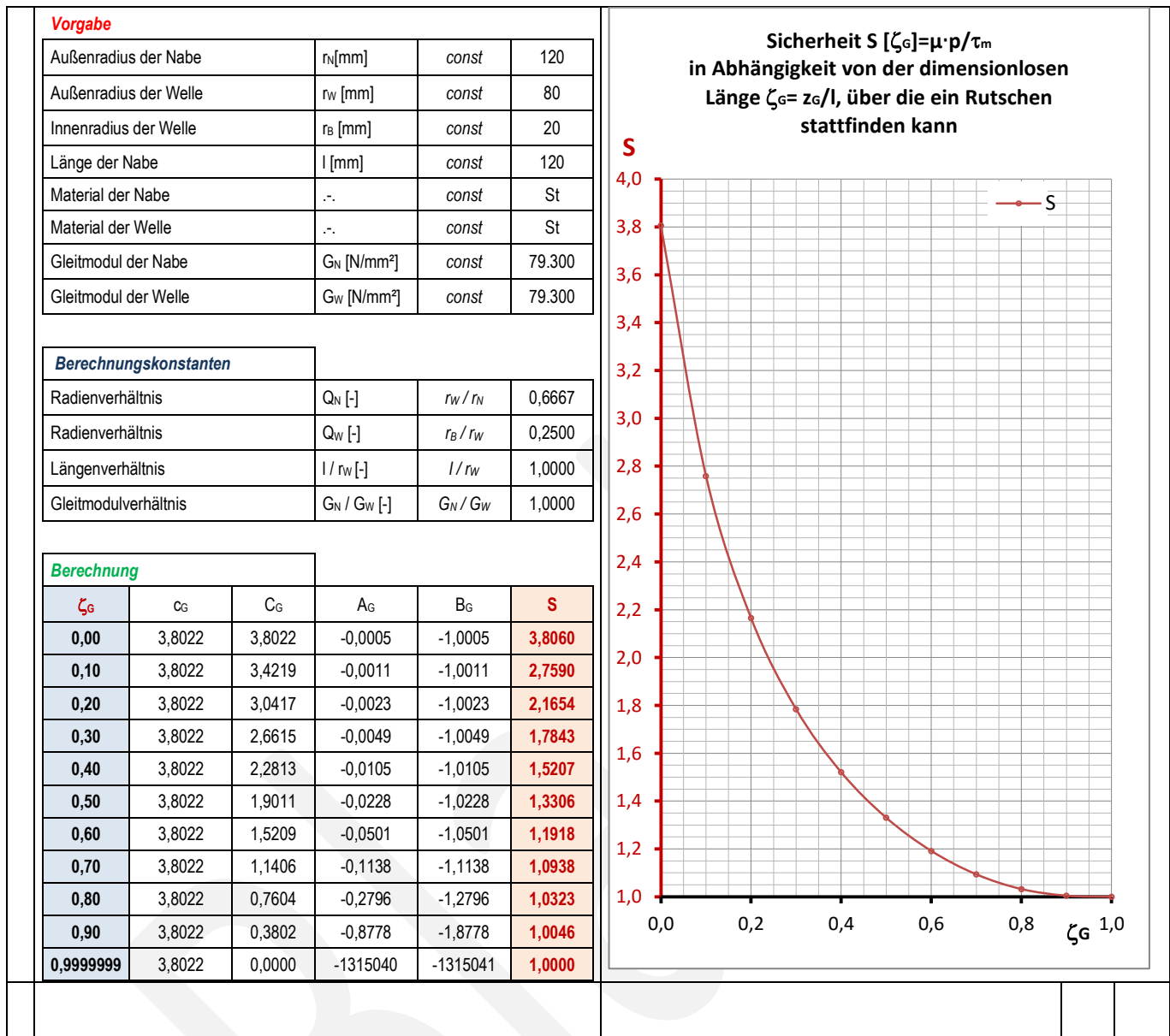
Beispiel (unter Berücksichtigung von Rutschen in der Trennfuge)							
Ermittlung der dimensionslosen Schubspannung τ^* in Abhängigkeit von der dimensionslosen Länge ζ, für verschiedene Sicherheiten							
	Beispiele	Sicherheit	1,0001	1,50	2,00	2,50	3,80
Vorgabe							
zu übertragendes Moment	M ₀ [Nm]		20.000	20.000	20.000	20.000	20.000
Übertragungssicherheit	S [-]	variabel >1,0	1,00001	1,50	2,00	2,50	3,81
Fugenpressung	p [N/mm ²]	p=f(M ₀ ,S)	34,5	51,8	69,1	86,3	131,4
Reibwert	μ [-]	const	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
Außenradius der Nabe	r _N [mm]	const	120	120	120	120	120
Außenradius der Welle	r _W [mm]	const	80	80	80	80	80
Innenradius der Welle	r _B [mm]	const	20	20	20	20	20
Länge der Nabe	l [mm]	const	120	120	120	120	120
Material der Nabe	.-.	const	St	St	St	St	St
Material der Welle	.-.	const	St	St	St	St	St
Gleitmodul der Nabe	G _N [N/mm ²]	const	79.300	79.300	79.300	79.300	79.300
Gleitmodul der Welle	G _W [N/mm ²]	const	79.300	79.300	79.300	79.300	79.300
Berechnungskonstanten							
Radienverhältnis	Q _N [-]	r _W / r _N	0,6667	0,6667	0,6667	0,6667	0,6667
Radienverhältnis	Q _W [-]	r _B / r _W	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500
Längenverhältnis	l / r _W [-]	l / r _W	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Gleitmodulverhältnis	G _N / G _W [-]	G _N / G _W	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Übergang	ζ_G [-]	Iteration <1	0,9872	0,4095	0,2386	0,1377	0,0000
Check		→ ≈ 0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Exponentkonstante	√C _G [-]		0,04850	2,2452	2,8950	3,2785	3,8021
Integrationskonstante	A _G [-]	-.1/(e ^{2√C_G} -1)	-9,8181	-0,0113	-0,0031	-0,0014	-0,0005
Integrationskonstante	B _G [-]	-.1(1-e ^{-2√C_G})	-10,8181	-1,0113	-1,0031	-1,0014	-1,0005
Kontrollen / Schubspannung							
Mittl. Schubspannung	τ _m [N/mm ²]		4,14	4,14	4,14	4,14	4,14
Max. Schubspannung	τ _{max} [N/mm ²]	μ·p	4,14	6,22	8,29	10,36	15,77
Min. diml. Schubspannung	τ _{min} * [-]	τ _{min} /τ _m	0,9988	0,3142	0,2205	0,1882	0,1698
Mittl. diml. Schubspannung	τ _m * [-]	τ _m /τ _m	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Max. diml. Schubspannung	τ _{max} * [-]	τ _{max} /τ _m =S	1,00	1,50	2,00	2,50	3,81

Sicherheit	1,0001	1,50	2,00	2,50	3,81
	ζ_1 [-]	ζ_2 [-]	ζ_3 [-]	ζ_4 [-]	ζ_5 [-]
	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
ζ_G	0,9872	0,4095	0,2386	0,1377	0,0000
	0,9887	0,4751	0,3232	0,2335	0,1111
	0,9901	0,5407	0,4078	0,3294	0,2222
	0,9915	0,6063	0,4924	0,4252	0,3333
	0,9929	0,6719	0,5770	0,5210	0,4445
	0,9943	0,7376	0,6616	0,6168	0,5556
	0,9957	0,8032	0,7462	0,7126	0,6667
	0,9972	0,8688	0,8308	0,8084	0,7778
	0,9986	0,9344	0,9154	0,9042	0,8889
	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	$\tau_{1,0}^*$ [-]	$\tau_{1,5}^*$ [-]	τ_2^* [-]	$\tau_{2,5}^*$ [-]	$\tau_{3,8}^*$ [-]
	1,0000	1,5000	2,0000	2,5000	3,8058
ζ_G	1,0000	1,5000	2,0000	2,5000	3,8058
	1,0000	1,1772	1,4539	1,7394	2,4961
	1,0000	0,9281	1,0595	1,2122	1,6385
	1,0000	0,7370	0,7757	0,8476	1,0778
	1,0000	0,5920	0,5728	0,5967	0,7123
	1,0000	0,4840	0,4297	0,4259	0,4758
	1,0000	0,4064	0,3314	0,3122	0,3255
	1,0000	0,3541	0,2678	0,2403	0,2341
	1,0000	0,3240	0,2320	0,2008	0,1852
	1,0000	0,3142	0,2205	0,1882	0,1698
	$\tau_{1,0}^*$ [-]	$\tau_{1,5}^*$ [-]	τ_2^* [-]	$\tau_{2,5}^*$ [-]	$\tau_{3,8}^*$ [-]
Check: Ist / Summe Δ	0,9958	1,0020	1,0045	1,0072	1,0148
Soll	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000



Ermittlung des Bereiches, in dem ein Rutschen in der Fuge auftreten kann in Abhängigkeit von Sicherheit, Geometrie und Materialkennwerten		
Sicherheit als entscheidende, gesuchte Größe (siehe 9.24)	$S = -\frac{1-S \cdot \zeta_G}{1-\zeta_G} \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G)$	9.24
	$S - S \cdot \zeta_G = -(1 - S \cdot \zeta_G) \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G)$	
	$S - S \cdot \zeta_G - S \cdot \zeta_G \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G) = -\sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G)$	
	$S \cdot (1 - \zeta_G - \zeta_G \cdot \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G)) = -\sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G)$	
	$S \cdot (1 - \zeta_G (1 + \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G))) = -\sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G)$	
Mit Vorgabe von Geometrie, Materialkennwerten und eines Bereiches für $0 \leq \zeta_G \leq 1$ kann ein Diagramm $S(\zeta_G, A_G, B_G)$ erstellt werden, welches Grundlage für die Ermittlung der erforderlichen / angestrebte Pressung sein kann (siehe Beispiel).	$S = -\frac{\sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G)}{1 - \zeta_G (1 + \sqrt{C_G} \cdot (A_G + B_G))}$	9.30

Beispiel			
-----------------	--	--	--



10. Quellen	
[1]	Schlotmann, D.: Maschinenelemente, Grundlagen, Berlin, VEB Verlag Technik, 1967, S. 111
[2]	Roloff / Matek: Maschinenelemente, 15. Auflage, Verlag Vieweg, 2001, S. 371
[3]	Müller, H. W.: Der Mechanismus der Drehmomentübertragung in Pressverbindungen , Darmstadt, Dissertation, 1961
[4]	Schmidt, E.: Theorie und experimentelle Untersuchung des Mechanismus der Drehmomentübertragung von Kegel-Press-Verbindungen, Darmstadt, Dissertation, 1969
Weiterführende Literatur	
	Leidich, Erhard: Beanspruchung von Pressverbindungen im elastischen Bereich und Auslegung gegen Dauerbruch, Dissertation, TU Darmstadt, 1983
	Meißner, C., Tenberge, P.: Simulation der Kraftübertragung in Pressverbindungen mittels FEM und einem verschiebungsabhängigen Reibkraftansatz, VDI Wissensforum Welle-Nabe-Verbindungen Wiesloch 24. / 25.10. 2007
	Meißner, C., Tenberge, P.: Simulation der Kraftübertragung in dynamisch hoch belasteten Pressverbindungen, WISSENSPORTAL baumaschine.de 1(2006)
	Meißner, C.: Tribologische Betrachtung von Pressverbindungen, Technische Universität Chemnitz Institut für Konstruktions- und Antriebstechnik, http://home.arcor.de/chr_meissner/home/studium/ueb/Skript_Pressverbindungen.pdf
	Kollmann, F.: Welle-Nabe-Verbindungen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1983.
	Leidich, E.: Beanspruchung von Pressverbindungen im elastischen Bereich und Auslegung gegen Dauerbruch, FVA-Arbeitsblatt zum Forschungsvorhaben 62/1, August 1984

		Leidich, E.; Smetana, T.; Lukschandel, J.; Haggenmüller: Reibungserhöhende Oberflächenschichten für Torsionsbelastungen, Antriebstechnik 40 (2001) Nr. 10, S. 53 u.f.	
		Leidich, E.: Beanspruchung von Pressverbindungen im elastischen Bereich und Auslegung gegen Dauerbruch, Deutscher Verband für Materialprüfung e.V. (1987).	
		Leidich, E.: Mikroschlupf und Dauerfestigkeit bei Pressverbänden, Antriebstechnik 27 (1988), Heft 3, S. 53 - 58.	
		Leidich, E.: Zeitgemäße Dimensionierung von Pressverbindungen, VDI-Berichte Nr. 1689 S.203 – 277,	
		Lindgren, M.: Drehmomentübertragung in Pressverbindungen, Konstruktion 25 (1973), Heft 9, S. 338 - 341.	
		Glögler, Christian: Untersuchungen an spannungshomogenisierten und zylindrischen Pressverbindungen unter Torsionsbelastung, Dissertation, Universität Stuttgart, 2003	

Bladt