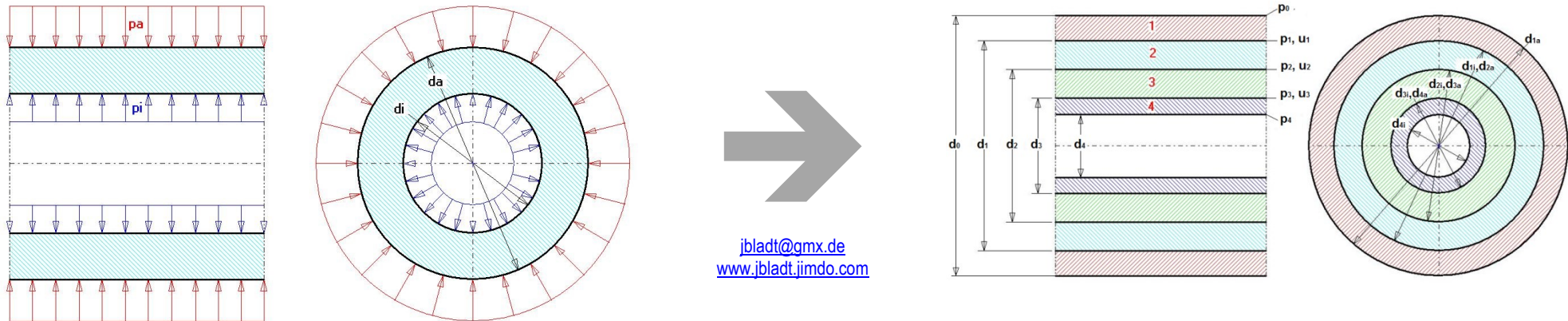


# Vom Hohlzylinder zur Mehrfachpressverbindung

From the hollow cylinder to the multiple interference fit assembly

Klaus-Jürgen Bladt / Rostock  
Release 2: 2014-05-28



[jbladt@gmx.de](mailto:jbladt@gmx.de)  
[www.jbladt.jimdo.com](http://www.jbladt.jimdo.com)

Aus den Gleichungen für den dickwandigen Hohlzylinder unendlicher Länge unter Innen- und Außendruck werden die Gleichungen für die 4-fach Pressverbindung ermittelt.  
Based on the equations of thick-walled hollow cylinder with infinitely length under inside and outside pressure the equations for the quadruple interference fit assembly are determined.

Die Dokumentation wurde mit bestem Wissen und Gewissen erarbeitet. Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle erhebt die Dokumentation keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Unbeabsichtigte Fehler können auftreten. Hinweise auf inhaltliche Verbesserungen sind erwünscht. Für die Vervielfältigung des Dokumentes und die Übernahme von Auszügen ist die Zustimmung des Autors erforderlich. Für den Inhalt verlinkter Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

The paper was prepared to best of one's knowledge. The paper makes no claim to be complete and correct in spite of the careful control. References for improvements with regard to the content are welcome. The duplication of the document and the taking over abridges require the approval of the author. The linked WEB-Site operators are responsible for contents of their own sites.

# Spannungen und Deformationen am unendlich langen Hohlzylinder (2-dimensionale Betrachtung) / Stress and deviation of a hollow cylinder with infinitely length (2-dim. viewing)

1	<b>Geometrie</b> <b>Geometry</b>				1								
2	Aussendurchmesser Outside-diameter	$= d_a = 2 \cdot r_a$ [mm];	Innendurchmesser Inside-diameter	$= d_i = 2 \cdot r_i$ [mm]	2								
3	Durchmesserverhältnis Diameter ratio	$Q = \frac{d_i}{d_a} = \frac{2 \cdot r_i}{2 \cdot r_a} = \frac{r_i}{r_a} = const$ ;		$r_i \leq r_a$	3								
4	dimensionsloser Radius dimensionless radius	$q = \frac{d}{d_a} = \frac{2 \cdot r}{2 \cdot r_a} = \frac{r}{r_a} = var$ ;		$Q \leq q \leq 1$	4								
5	<b>Druck</b> <b>Pressure</b>				5								
6	Aussendruck Outexternal pressure	$= p_a$ [N/mm <sup>2</sup> ]			6								
7	Inndruck Internal pressure	$= p_i$ [N/mm <sup>2</sup> ]			7								
8	<b>Werkstoffkennwerte</b> <b>Material characteristics</b>				8								
9	Elastizitätsmodul Young's modulus	$E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	info: Stahl steel	$E \approx 2,1 \cdot 10^5$	Bronze Bronce	$E \approx (0,8 \dots 1,2) \cdot 10^5$	Poissonsche Konstante Poisson ratio	$m$ [-]	info: Stahl steel	$m \approx 3,3$	Bronze Bronce	$m \approx 2,7$	9
10	Streckgrenze yield strength	$R_e$ [N/mm <sup>2</sup> ]		$> \sigma_{vmax}$		10							
11	<b>Spannungen</b> <b>Stress</b>					11							
12	Radialspannung Radial stress	$\sigma_r = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left[ p_i \cdot \left( 1 - \frac{r_a^2}{r^2} \right) + p_a \cdot \left( \frac{r_a^2}{r^2} - \frac{r_a^2}{r_i^2} \right) \right] = \frac{Q^2}{1-Q^2} \cdot \left[ p_i \cdot \left( \frac{q^2-1}{q^2} \right) + p_a \cdot \left( \frac{Q^2-q^2}{Q^2 \cdot q^2} \right) \right]$	Tangentialspannung tangential stress	$\sigma_t = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left[ p_i \cdot \left( 1 + \frac{r_a^2}{r^2} \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_i^2} \left( 1 + \frac{r^2}{r_a^2} \right) \right] = \frac{Q^2}{1-Q^2} \cdot \left[ p_i \cdot \left( \frac{1+q^2}{q^2} \right) - p_a \cdot \left( \frac{Q^2+q^2}{Q^2 \cdot q^2} \right) \right]$	12								
13	Radialspannung-aussen radial stress-outside	$r = r_a$ ; $\sigma_{ra} = -p_a$	Tangentialspannung-aussen tangential stress-outside	$r = r_a$ ; $\sigma_{ta} = \frac{2 \cdot p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot (r_a^2 + r_i^2)}{r_a^2 - r_i^2} = p_i \cdot \frac{2 \cdot Q^2}{1-Q^2} - p_a \cdot \frac{(1+Q^2)}{1-Q^2}$	13								
14	Radialspannung-innen radial stress-inside	$r = r_i$ ; $\sigma_{ri} = -p_i$	Tangentialspannung-innen tangential stress-inside	$r = r_i$ ; $\sigma_{ti} = \frac{p_i \cdot (r_a^2 + r_i^2) - 2 \cdot p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} = p_i \cdot \frac{(1+Q^2)}{1-Q^2} - p_a \cdot \frac{2}{1-Q^2}$	14								
15	Vergleichsspannung equivalent stress	$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2}$ ;	Gestaltänderungshypothese (von Miseses) Hypothesis of alteration of shape	$\rightarrow$ unendlich langer Hohlzylinder (2-dimentional) infinitely length of hollow cylinder (two-dimensional)	$l \rightarrow \infty \leadsto \sigma_z = 0$	15							
16		$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + (\sigma_t - \sigma_r)^2}$				16							
18	Durchmesseränderung Diameter deviation	$E \cdot \frac{\Delta d}{d} = E \cdot \varepsilon_t = \sigma_t - \frac{1}{m} \cdot \sigma_r$				18							
19	Durchmesseränderung-aussen diameter deviation-outside	$E \cdot \frac{\Delta d_a}{d_a} = E \cdot \varepsilon_{ta} = \sigma_{ta} - \frac{1}{m} \cdot \sigma_{ra} = +p_i \cdot \frac{2 \cdot Q^2}{1-Q^2} - p_a \cdot \left[ \frac{1+Q^2}{1-Q^2} - \frac{1}{m} \right]$				19							
20	Durchmesseränderung-innen diameter deviation-inside	$E \cdot \frac{\Delta d_i}{d_i} = E \cdot \varepsilon_{ti} = \sigma_{ti} - \frac{1}{m} \cdot \sigma_{ri} = +p_i \cdot \left[ \frac{(1+Q^2)}{1-Q^2} + \frac{1}{m} \right] - p_a \cdot \frac{2}{1-Q^2}$				20							

# Gleichungssystem zur Berechnung von Mehrfachpressverbänden / System of equations for the calculation of multiple interference fit assemblies

Teil part	Seite side	Druck pressure	Radialspannung radial stress	Tangentialspannung tangential stress	Vergleichsspannung equivalent stress $\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + (\sigma_t - \sigma_r)^2}$	Dehnung deviation $E \cdot \varepsilon_t = \sigma_t - \frac{1}{m} \cdot \sigma_r$	Übermaß Interference $u = d_f \cdot ( \varepsilon_{ta}  +  \varepsilon_{ti} )$
1	außen outside	$p_{1a} = p_0 = 0$	$\sigma_{r1a} = -p_0 = 0$	$\sigma_{t1a} = p_1 \cdot \frac{2 \cdot Q_1^2}{1 - Q_1^2} - p_0 \cdot \frac{1 + Q_1^2}{1 - Q_1^2}$	$\sigma_{v1a} = \frac{1}{1 - Q_1^2} \cdot \sqrt{p_0^2 \cdot (1 + 3 \cdot Q_1^4) - 2 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot (Q_1^2 + 3 \cdot Q_1^4) + 4 \cdot p_1^2 \cdot Q_1^4}$	$E_1 \cdot \varepsilon_{t1a} = +p_1 \cdot \frac{2 \cdot Q_1^2}{1 - Q_1^2} - p_0 \cdot \left[ \frac{1 + Q_1^2}{1 - Q_1^2} - \frac{1}{m_1} \right]$	$d_{1i} = d_{2a} = d_1; d_{2i} = d_{3a} = d_2; d_{3i} = d_{4a} = d_3$
	innen inside	$p_{1i} = p_1$	$\sigma_{r1i} = -p_1$	$\sigma_{t1i} = p_1 \cdot \frac{1 + Q_1^2}{1 - Q_1^2} - p_0 \cdot \frac{2}{1 - Q_1^2}$	$\sigma_{v1i} = \frac{1}{1 - Q_1^2} \cdot \sqrt{p_1^2 \cdot (3 + Q_1^4) - 2 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot (Q_1^2 + 3) + 4 \cdot p_0^2}$	$E_1 \cdot \varepsilon_{t1i} = -p_0 \cdot \frac{2}{1 - Q_1^2} + p_1 \cdot \left[ \frac{1 + Q_1^2}{1 - Q_1^2} + \frac{1}{m_1} \right]$	$u_1 = \frac{d_1}{E_1} \cdot \left\{ p_1 \cdot \left[ \frac{1 + Q_1^2}{1 - Q_1^2} + \frac{1}{m_1} \right] - p_0 \cdot \frac{2}{1 - Q_1^2} \right\} + \frac{d_1}{E_2} \cdot \left\{ p_1 \cdot \left[ \frac{1 + Q_2^2}{1 - Q_2^2} - \frac{1}{m_2} \right] - p_2 \cdot \frac{2 \cdot Q_2^2}{1 - Q_2^2} \right\}$
2	außen outside	$p_{2a} = p_1$	$\sigma_{r2a} = -p_1$	$\sigma_{t2a} = p_2 \cdot \frac{2 \cdot Q_2^2}{1 - Q_2^2} - p_1 \cdot \frac{1 + Q_2^2}{1 - Q_2^2}$	$\sigma_{v2a} = \frac{1}{1 - Q_2^2} \cdot \sqrt{p_1^2 \cdot (1 + 3 \cdot Q_2^4) - 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (Q_2^2 + 3 \cdot Q_2^4) + 4 \cdot p_2^2 \cdot Q_2^4}$	$E_2 \cdot \varepsilon_{t2a} = +p_2 \cdot \frac{2 \cdot Q_2^2}{1 - Q_2^2} - p_1 \cdot \left[ \frac{1 + Q_2^2}{1 - Q_2^2} - \frac{1}{m_2} \right]$	
	innen inside	$p_{2i} = p_2$	$\sigma_{r2i} = -p_2$	$\sigma_{t2i} = p_2 \cdot \frac{1 + Q_2^2}{1 - Q_2^2} - p_1 \cdot \frac{2}{1 - Q_2^2}$	$\sigma_{v2i} = \frac{1}{1 - Q_2^2} \cdot \sqrt{p_2^2 \cdot (3 + Q_2^4) - 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (Q_2^2 + 3) + 4 \cdot p_1^2}$	$E_2 \cdot \varepsilon_{t2i} = -p_1 \cdot \frac{2}{1 - Q_2^2} + p_2 \cdot \left[ \frac{1 + Q_2^2}{1 - Q_2^2} + \frac{1}{m_2} \right]$	$u_2 = \frac{d_2}{E_2} \cdot \left\{ p_2 \cdot \left[ \frac{1 + Q_2^2}{1 - Q_2^2} + \frac{1}{m_2} \right] - p_1 \cdot \frac{2}{1 - Q_2^2} \right\} + \frac{d_2}{E_3} \cdot \left\{ p_2 \cdot \left[ \frac{1 + Q_3^2}{1 - Q_3^2} - \frac{1}{m_3} \right] - p_3 \cdot \frac{2 \cdot Q_3^2}{1 - Q_3^2} \right\}$
3	außen outside	$p_{3a} = p_2$	$\sigma_{r3a} = -p_2$	$\sigma_{t3a} = p_3 \cdot \frac{2 \cdot Q_3^2}{1 - Q_3^2} - p_2 \cdot \frac{1 + Q_3^2}{1 - Q_3^2}$	$\sigma_{v3a} = \frac{1}{1 - Q_3^2} \cdot \sqrt{p_2^2 \cdot (1 + 3 \cdot Q_3^4) - 2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot (Q_3^2 + 3 \cdot Q_3^4) + 4 \cdot p_3^2 \cdot Q_3^4}$	$E_3 \cdot \varepsilon_{t3a} = +p_3 \cdot \frac{2 \cdot Q_3^2}{1 - Q_3^2} - p_2 \cdot \left[ \frac{1 + Q_3^2}{1 - Q_3^2} - \frac{1}{m_3} \right]$	
	innen inside	$p_{3i} = p_3$	$\sigma_{r3i} = -p_3$	$\sigma_{t3i} = p_3 \cdot \frac{1 + Q_3^2}{1 - Q_3^2} - p_2 \cdot \frac{2}{1 - Q_3^2}$	$\sigma_{v3i} = \frac{1}{1 - Q_3^2} \cdot \sqrt{p_3^2 \cdot (3 + Q_3^4) - 2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot (Q_3^2 + 3) + 4 \cdot p_2^2}$	$E_3 \cdot \varepsilon_{t3i} = -p_2 \cdot \frac{2}{1 - Q_3^2} + p_3 \cdot \left[ \frac{1 + Q_3^2}{1 - Q_3^2} + \frac{1}{m_3} \right]$	$u_3 = \frac{d_3}{E_3} \cdot \left\{ p_3 \cdot \left[ \frac{1 + Q_3^2}{1 - Q_3^2} + \frac{1}{m_3} \right] - p_2 \cdot \frac{2}{1 - Q_3^2} \right\} + \frac{d_3}{E_4} \cdot \left\{ p_3 \cdot \left[ \frac{1 + Q_4^2}{1 - Q_4^2} - \frac{1}{m_4} \right] - p_4 \cdot \frac{2 \cdot Q_4^2}{1 - Q_4^2} \right\}$
4	außen outside	$p_{4a} = p_3$	$\sigma_{r4a} = -p_3$	$\sigma_{t4a} = p_4 \cdot \frac{2 \cdot Q_4^2}{1 - Q_4^2} - p_3 \cdot \frac{1 + Q_4^2}{1 - Q_4^2}$	$\sigma_{v4a} = \frac{1}{1 - Q_4^2} \cdot \sqrt{p_3^2 \cdot (1 + 3 \cdot Q_4^4) - 2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot (Q_4^2 + 3 \cdot Q_4^4) + 4 \cdot p_4^2 \cdot Q_4^4}$	$E_4 \cdot \varepsilon_{t4a} = +p_4 \cdot \frac{2 \cdot Q_4^2}{1 - Q_4^2} - p_3 \cdot \left[ \frac{1 + Q_4^2}{1 - Q_4^2} - \frac{1}{m_4} \right]$	
	innen inside	$p_{4i} = p_4 = 0$	$\sigma_{r4i} = -p_4 = 0$	$\sigma_{t4i} = p_4 \cdot \frac{1 + Q_4^2}{1 - Q_4^2} - p_3 \cdot \frac{2}{1 - Q_4^2}$	$\sigma_{v4i} = \frac{1}{1 - Q_4^2} \cdot \sqrt{p_4^2 \cdot (3 + Q_4^4) - 2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot (Q_4^2 + 3) + 4 \cdot p_3^2}$	$E_4 \cdot \varepsilon_{t4i} = -p_3 \cdot \frac{2}{1 - Q_4^2} + p_4 \cdot \left[ \frac{1 + Q_4^2}{1 - Q_4^2} + \frac{1}{m_4} \right]$	

	Übermaß interference		Matrix zur Bestimmung von $p_i$ oder $u_i$ Matrix for calculation of $p_i$ or $u_i$																	
	$d_{1i} = d_{2a} = d_1; d_{2i} = d_{3a} = d_2; d_{3i} = d_{4a} = d_3$	$p_0 = 0; p_4 = 0$																		
→	$u_1 = \left\{ -\frac{d_1}{E_1} \cdot \frac{2}{1 - Q_1^2} \right\} \cdot p_0 + \left\{ \frac{d_1}{E_1} \cdot \left[ \frac{1 + Q_1^2}{1 - Q_1^2} + \frac{1}{m_1} \right] + \frac{d_1}{E_2} \left[ \frac{1 + Q_2^2}{1 - Q_2^2} - \frac{1}{m_2} \right] \right\} \cdot p_1 + \left\{ -\frac{d_1}{E_2} \cdot \frac{2 \cdot Q_2^2}{1 - Q_2^2} \right\} \cdot p_2$	$u_1 = a_{11} \cdot p_1 + a_{12} \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$	<table border="1"> <tr> <td><b>u</b></td> <td><b>p<sub>1</sub></b></td> <td><b>p<sub>2</sub></b></td> <td><b>p<sub>3</sub></b></td> </tr> <tr> <td><b>u<sub>1</sub></b></td> <td><b>a<sub>11</sub></b></td> <td><b>a<sub>12</sub></b></td> <td><b>0</b></td> </tr> <tr> <td><b>u<sub>2</sub></b></td> <td><b>a<sub>21</sub></b></td> <td><b>a<sub>22</sub></b></td> <td><b>a<sub>23</sub></b></td> </tr> <tr> <td><b>u<sub>3</sub></b></td> <td><b>0</b></td> <td><b>a<sub>32</sub></b></td> <td><b>a<sub>33</sub></b></td> </tr> </table>		<b>u</b>	<b>p<sub>1</sub></b>	<b>p<sub>2</sub></b>	<b>p<sub>3</sub></b>	<b>u<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>11</sub></b>	<b>a<sub>12</sub></b>	<b>0</b>	<b>u<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>21</sub></b>	<b>a<sub>22</sub></b>	<b>a<sub>23</sub></b>	<b>u<sub>3</sub></b>	<b>0</b>	<b>a<sub>32</sub></b>	<b>a<sub>33</sub></b>
<b>u</b>	<b>p<sub>1</sub></b>	<b>p<sub>2</sub></b>			<b>p<sub>3</sub></b>															
<b>u<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>11</sub></b>	<b>a<sub>12</sub></b>			<b>0</b>															
<b>u<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>21</sub></b>	<b>a<sub>22</sub></b>	<b>a<sub>23</sub></b>																	
<b>u<sub>3</sub></b>	<b>0</b>	<b>a<sub>32</sub></b>	<b>a<sub>33</sub></b>																	
	$u_2 = \left\{ -\frac{d_2}{E_2} \cdot \frac{2}{1 - Q_2^2} \right\} \cdot p_1 + \left\{ \frac{d_2}{E_2} \cdot \left[ \frac{1 + Q_2^2}{1 - Q_2^2} + \frac{1}{m_2} \right] + \frac{d_2}{E_3} \left[ \frac{1 + Q_3^2}{1 - Q_3^2} - \frac{1}{m_3} \right] \right\} \cdot p_2 + \left\{ -\frac{d_2}{E_3} \cdot \frac{2 \cdot Q_3^2}{1 - Q_3^2} \right\} \cdot p_3$	$u_2 = a_{21} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 + a_{23} \cdot p_3$																		
	$u_3 = \left\{ -\frac{d_3}{E_3} \cdot \frac{2}{1 - Q_3^2} \right\} \cdot p_2 + \left\{ \frac{d_3}{E_3} \cdot \left[ \frac{1 + Q_3^2}{1 - Q_3^2} + \frac{1}{m_3} \right] + \frac{d_3}{E_4} \left[ \frac{1 + Q_4^2}{1 - Q_4^2} - \frac{1}{m_4} \right] \right\} \cdot p_3 + \left\{ -\frac{d_3}{E_4} \cdot \frac{2 \cdot Q_4^2}{1 - Q_4^2} \right\} \cdot p_4$	$u_3 = 0 \cdot p_1 + a_{32} \cdot p_2 + a_{33} \cdot p_3$																		
	$0 \leq Q_1 = \frac{d_{1i}}{d_{1a}} \leq 1; 0 \leq Q_2 = \frac{d_{2i}}{d_{2a}} \leq 1; Q_3 = \frac{d_{3i}}{d_{3a}} \leq 1; 0 \leq Q_4 = \frac{d_{4i}}{d_{4a}} \leq 1$		Gegeben: $u_1, u_2, u_3 \rightarrow p_1, p_2, p_3$ Given: $p_1, p_2, p_3 \rightarrow u_1, u_2, u_3$																	

Bei der Berechnung von Pressverbindungen müssen unbedingt der technologische Ablauf und die technologischen Bedingungen beim Fügen (u. a. Reihenfolge beim Fügen, Fügspiele, Oberflächenrauheiten) beachtet werden.  
 The technological process and the technological conditions (i. a. chronological order of fit, clearances for fitting, surface roughnesses) are in either case to take into account of the calculation of the multiple interference fit assemblies.

Info: Man beachte Aufschubweg / mind the drive-up distance:  $a = \frac{z}{2 \cdot \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{(u + 2 \cdot (g_i \cdot R_{ti} + g_a \cdot R_{ta}))}{2 \cdot \tan \frac{\alpha}{2}}$

Quelle / References: Taschenbuch Maschinenbau, Band I Grundlagen, VEB Verlag Technik, 1965, Seite 517 (6.84), (6.85)