

Bestimmung der Gewindesteifigkeit auf der Grundlage des schubweichen Balkens (Timoschenko-Balken)

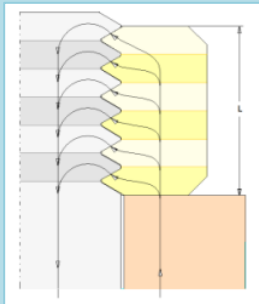
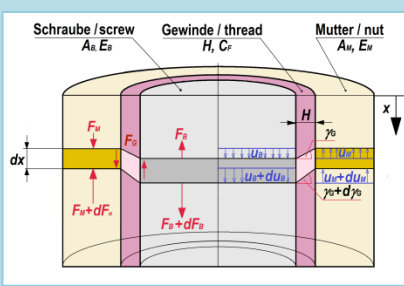
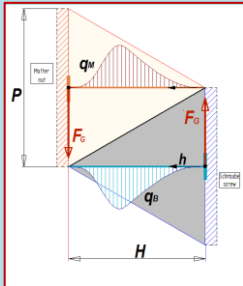
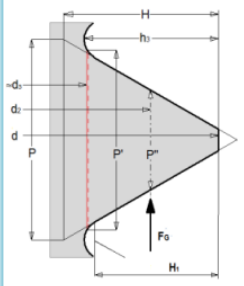
Attempt of the estimation of the stiffness of the thread based on the Timoshenko beam

Klaus-Jürgen Bladt, Streuwiesenweg 60, 18119 Rostock

Rostock, 11.10.2015

Rostock, 19.02.2018

Contact: www.jbladt.de

			
<p>Zusammenwirken von Schraube und Mutter Interaction of screw and nut</p>	<p>Modell der Kraftübertragung in einer Schraubenverbindung Model of the force transfer in a screw connection</p>	<p>Belastung der Gewindeflanken [1] Load of the thread flanks</p>	<p>Gewindegeometrie Geometry of thread</p>

Die Dokumentation wurde mit bestem Wissen und Gewissen erarbeitet. Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle erhebt die Dokumentation keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Unbeabsichtigte Fehler können auftreten. Hinweise auf inhaltliche Verbesserungen sind erwünscht. Für die Vervielfältigung des Dokumentes und die Übernahme von Auszügen ist die Zustimmung des Autors erforderlich. Für den Inhalt verlinkter Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

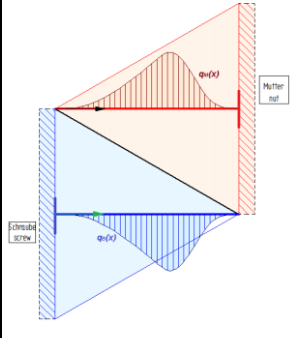
The paper was prepared to the best of one's knowledge. The paper makes no claim to be complete and correct in spite of careful control. References for improvements with regard to the content are welcome.

The duplication of the document and the taking over excerpts require the approval of the author. The linked WEB-Site operators are responsible for contents of their own sites.

permanently under construction



Bestimmung der Gewindesteifigkeit auf der Grundlage des Schubweichen Balkens (Timoschenko-Balken)
Attempt of the estimation of the stiffness of the thread based on the Timoshenko beam

<p>A</p> <p>1</p>	<p>Projekt Anlass /Problem, Ziel, Weg Project cause / problem, target, method</p>	<p>Anlass:</p> <ul style="list-style-type: none"> In [1] wurde ein Modell für Kraftübertragung in einer Schraubenverbindung vorgestellt. Für die Kraftübertragung im Gewinde wird hierbei ein Teilmodell benötigt, welches die Deformation des Gewindes bei Belastung unter Berücksichtigung von Geometrie und Materialeigenschaften beschreibt. In [2] wird in diesem Zusammenhang die Gewindesteifigkeit $C_G \left[\frac{N}{mm} \right] = 0,34 \cdot E \cdot d$ angegeben. In der Literatur konnte kein Hinweis gefunden werden, wie dieser Wert ermittelt wurde. Hierbei wird davon ausgegangen, dass Schraube und Mutter den gleichen E-Modul haben. <p>Ziel: Es sind also drei Fragen zu beantworten:</p> <ul style="list-style-type: none"> Ist die Formel nachvollziehbar hinsichtlich der Parameter und der Größenordnung des Koeffizienten? Kann die in [2] angegebene Steifigkeit $C_G = 0,34 \cdot E \cdot d$ für das in [1] angegebene Modell verwendet werden. Was passiert, wenn Schraube und Mutter unterschiedliche E-Module haben? <p>Weg: Die Steifigkeit einer Gewindepaarung $C_G = F/w$ soll mit Hilfe eines Balkenmodells, welches mit einer Flächenlast $q(x)$ belastet ist, unter der Berücksichtigung von Biege- und Schubspannung (<i>Timoschenko-Balken</i>) ermittelt werden.</p> <hr/> <p>Cause and problem:</p> <ul style="list-style-type: none"> A model for the force transfer is presented in [1]. For the force transfer in the thread a submodel is required here in, which the deformation of the thread under Load depend on the geometry and material conditions describes. In this context a stiffness of the thread $C_G \left[\frac{N}{mm} \right] = 0,34 \cdot E \cdot d$ is specified in [2]. It could found no evidence in the literature, how the value was determined. It is assumed in this equation, that the E-moduli are equal. <p>Objective: There are three questions to be answered:</p> <ul style="list-style-type: none"> Is the equation $C_G = 0,34 \cdot E \cdot d$ reproducible / comprehensible with regard to the parameters and value of the coefficient? Is the in [2] specified stiffness usable for the in [1] presented model. What happens in case when the E-moduli of Screw (bolt) and nut are different? <p>Method: The stiffness of a matching of thread $C_G = F/w$ is to be determined by means of a beam model which is loaded with a line load $q(x)$ taking in account the bending stress and the shear stress (<i>Timoshenko-beam</i>).</p> <p>[1] K.-J. Bladt: Lastverteilung in einem Gewinde / Load distribution in a thread http://www.jblatt.de/technik/maschinenelemente-machine-elements/</p> <p>[2] D. Schlottmann: Maschinenelemente – Grundlagen, VEB Verlag, Technik Berlin, 1973, Kap. 5. Gewinde / P. Goetze, S. 221</p>
<p>2</p>	<p>Modellvorstellung und qualitative Beschreibung der Lastverteilung an der Gewindeflanke model conception and qualitative description of the load distribution on the thread flank</p>	
<p>3</p>	<p>Annahmen und Feststellungen assumptions and assessments</p>	<ol style="list-style-type: none"> Das Gewinde wird idealisiert durch einen kurzen, fest eingespannten Kragträger mit veränderlicher Höhe und konstanter Breite $B = \pi \cdot \frac{d_2}{2}$. Diese Breite B wurde gewählt, da bei einem ebenen Schnitt nur die Hälfte des Gewindes erfasst wird. B entspricht dem belasteten Umfangsbereich in einem ebenen Schnitt. Als Kontaktmodell liegen zwei dieser Träger spiegelbildlich übereinander, (die Einspannungen liegen sich gegenüber). Die Gewindeflanke (Kragträger) wird durch eine Lastverteilung mit unbekannter Verteilung in Trägerlängsrichtung x beansprucht. In Umfangsrichtung ist diese Lastverteilung konstant. Sie wird im Folgenden als Streckenlast $q(x)$ bezeichnet. Die aus der Streckenlast $q(x)$ resultierende Kraft F wird als bekannt vorausgesetzt.



		<ol style="list-style-type: none"> <i>Kontakt besteht über die gesamte Trägerfläche</i> (Gewindeflanke), so dass beide Träger (Flanken) eine <i>gemeinsame Deformation</i> aufweisen. Da es ein kurzer Träger ist, wird bei der Biegelinienberechnung sowohl die Verformung durch die <i>Biegespannung</i> und <i>die Schubspannung</i> berücksichtigt (Timoschenko-Balken). Die Streckenlast $q(x)$ ist wie folgt gekennzeichnet: Die Streckenlasten für beide Flanken liegen sich spiegelbildlich gegenüber: $\{+q(x)\}$ und $\{-q(x)\}$ Die Streckenlast hat die Reaktionslastverteilung $Q'(x) = -q(x)$ im Balken. Die Spitzen der gepaarten Gewindegänge liegen sich jeweils gegenüber. An den Spitzen des jeweiligen Gewindes kann keine Last übertragen werden und die Deformation hat einen endlichen Wert: $q(x = 0) = 0$ und $q(x = l) = 0$ $dq(x = 0)/dx = 0$ und $dq(x = l)/dx = 0$ Sind die E-Module für Mutter und Schraube unterschiedlich, ergibt sich <u>keine</u> Symmetrie der Belastung (Streckenlast) zur Flankenmitte $x = l/2$
4		<ol style="list-style-type: none"> The thread is idealized by a cantilever beam with variable height and the breadth $B = \pi \cdot \frac{d_2}{2}$. The breadth B was chosen because the half of the thread is only detected at a planar section. B corresponds to the loaded peripheral region in a planar section. The contact model consists of two beams, which are arranged in mirror image. The thread flanks are loaded with a distributed load. The distribution is unknown along the length of beam. However this distributed load is constant in direction of circumference. It is called 'line load' in the following, too. The resulting force, which is the result of the line load $q(x)$, is known. The contact is given over the complete area so that both beams have the same displacement (deformation). The beams are short. Therefore the bending line is to calculate with the bending stress and the shear stress. (Timoshenko beam) The line load is characterized as follows: The line loads are a mirror image $\{+q(x)\}$ und $\{-q(x)\}$ The response to the line load in the beam is $Q'(x) = -q(x)$ The tips of the threads are opposed to another. A load transfer at the tips is not possible. Therefore the deformation / displacement has a finite value at the tips: $q(x = 0) = 0$ und $q(x = l) = 0$ $dq(x = 0)/dx = 0$ und $dq(x = l)/dx = 0$ The line loads have a asymmetric distribution in relation to the middle of the beam $= l/2$, if the E-moduli are different.
5	<p>Erwartete Lösung expected solution</p>	<ul style="list-style-type: none"> Für $E_B = E_M \rightarrow$ symmetrische Verteilung der Streckenlast zu $l/2$ symmetrical distribution of line load Für $E_B \neq E_M \rightarrow$ asymmetrische Verteilung der Streckenlast asymmetrical distribution of line load Die Kontaktlinien (Verformungen) sind parallel. The contact lines (displacements) are parallel.

B		
1	<p>Allgemeiner Weg general method</p>	
2	<p>Krümmung infolge Biegenormalspannung deflection due to the bending normal stress</p>	$w''_{\sigma}(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I(x)}$
3	<p>info</p>	<p>Diese Gleichung stellt eine Vereinfachung der nichtlinearen Differentialgleichung dar. This equation is a simplification of the non-linear differential equation</p> $w''_{\sigma}(x) = -\frac{1}{E \cdot I(x)} \cdot \frac{M(x)}{(1 + w'^2)^{2/3}}$ <p>Die o.a. gebräuchliche Vereinfachung zur Linearisierung kann bei der Lösung in 'empfindlichen Bereichen' (Bereich der Gewindespitzen) zu störenden Abweichungen führen. The a. m. simplification for the linearization of the equation may cause disturbing deviations in the solution for 'sensitive areas' (area of thread tips).</p>
5	<p>Neigung infolge Schub deviation due to the bending shear stress</p>	$w'_{\tau} = \frac{Q(x)}{A_S(x) \cdot G} = \frac{Q(x)}{k \cdot A(x) \cdot G}$, $k = \frac{5}{6}$ Korrekturfaktor für Rechteckquerschnitt coefficient for the rectangle profile
6	<p>info</p>	<p>Diese Gleichung wurde von S. Timoschenko eingeführt, geht von einer mittleren Verformungsenergie aus und ist deshalb auch eine Näherung. This equation was introduced by S. Timoschenko. The equation is the result of the mean of deformation energy. This equation is only a good approximation. The coefficient k is used for consideration of the shape of the cross area \square.</p>
9	<p>Krümmung infolge Biegemoment u. Schub bending due to the bending moment and shear force</p>	$w''(x) = w''_{\sigma}(x) + w''_{\tau}(x)$
10	<p>Neigung infolge Biegung und Schub due to the bending moment and shear force</p>	$w'(x) = w'_{\sigma}(x) + w'_{\tau}(x)$
11	<p>Verformung durch Biegemoment u. Schub displacement due to bending moment and shear force</p>	$w(x) = w_{\sigma}(x) + w_{\tau}(x)$ Kontaktlinie / contact line



12			
13	Steifigkeit (allgemein) stiffness (in general)	$C = \frac{F}{w_F} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Verschiebung}} = \frac{\text{force}}{\text{displacement}}$	
14	Modell, Geometrie, erwartete Lastverteilung, Koordinatensystem model geometry, expected load distribution, coordinate system		
15			
16		Schraube / Bolt, screw	Mutter / Nut
17	Beide Teile des Gewindes both parts of the thread		

C			
1	Gegebene Größen known parameters		
2	Kraft force	F [N]	
3	Mittlerer Gewindedurchmesser mean thread diameter	d_2 [mm]	
4	Gewindesteigung thread gradient	P [mm]	
5	Flankenwinkel Edge angle	β [°] (= 60° Metrisches Gewinde / metric thread)	
6	Gewindetiefe depth of thread	$l = \frac{P}{2 \cdot \tan \beta / 2}$ [mm] (für metrisches Gewinde: $l = P \cdot \cos \beta / 2$)	
7	Längenkoordinate Belastungsbereich coordinate, load range	x [mm], $0 \leq x \leq l$ $\xi = \frac{x}{l}$ [-] $0 \leq \xi \leq 1$ $x = l \cdot \xi = \frac{P}{2 \cdot \tan \beta / 2} \cdot \xi$ $dx = l \cdot d \xi = \frac{P}{2 \cdot \tan \beta / 2} \cdot d \xi$	
8	Gewindehöhe Height of thread	$h_B(x) = P \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) = h_B(\xi) = P \cdot (1 - \xi)$	$h_M(x) = P \cdot \frac{x}{l} = h_M(\xi) = P \cdot \xi$,
9	Effektiv belasteter Umfangsbereich real loaded peripheral region	$B \approx \pi \cdot \frac{d_2}{2} = const$	
10	Querschnittsfläche cross area	$A_B(x) = \frac{\pi \cdot d_2}{2} \cdot h_B(x) = A_B(\xi) = \pi \cdot d_2 / 2 \cdot P \cdot (1 - \xi)$	$A_M(x) = \pi \cdot \frac{d_2}{2} \cdot h_M(x) = A_M(\xi) = \pi \cdot \frac{d_2}{2} \cdot P \cdot \xi$
11	Effektive Querschnittsfläche effective cross area	$A_{BS}(x) = k \cdot B \cdot P \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) = A_{BS}(\xi) = k \cdot B \cdot P \cdot (1 - \xi)$	$A_{MS}(x) = k \cdot B \cdot P \cdot \frac{x}{l} = A_{MS}(\xi) = k \cdot B \cdot P \cdot \xi$
12	Flächenträgheitsmoment area moment of inertia	$I_B(x) = \frac{B \cdot h_B^3(x)}{12} \approx \frac{\pi \cdot d_2^3 \cdot h_B^3(x)}{12}$ $I_B(x) = \frac{B}{12} \cdot P^3 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)^3 = I_B(\xi) = \frac{B}{12} \cdot P^3 \cdot (1 - \xi)^3$	$I_M(x) = \frac{B \cdot h_M^3(x)}{12} \approx \frac{\pi \cdot d_2^3 \cdot h_M^3(x)}{12}$ $I_{BM}(x) = \frac{B}{12} \cdot P^3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 = I_B(\xi) = \frac{B}{12} \cdot P^3 \cdot \xi^3$
13	E-Modul modulus of elasticity	E_B [N/mm ²]	
14	Gleitmodul shear modulus	$G_B \left[\frac{N}{mm^2} \right] = g_B \cdot E_B$	



15	Umrechnungsfaktor conversion factor	$g_B = \frac{1}{2 \cdot (1+\nu)} \approx \frac{1}{2,6} = 0,3846$	$g_M = \frac{1}{2 \cdot (1+\nu)} \approx \frac{1}{2,6} = 0,3846$
16		Poisson-Zahl $\nu_{Stahl} = \nu_{stee} \approx 0,28 \dots 0,30$, $\nu_{Alu} \approx 0,34$, $\nu_{Messing} = \nu_{brass} \approx 0,37$ Poisson's ratio $\nu_{Bronze} \approx 0,33$, $\nu_{Cu} \approx 0,35$,	
17		Für die weitere Berechnung wird der Wert $\nu \approx 0,30$ verwendet! / The value $\nu \approx 0,30$ is used for the following calculations!	
18	Faktor für effektive Schubfläche factor of the effective shear area	Für Rechteckquerschnitt $k = \frac{5}{6} = \frac{1}{1,2} = 0,8333$ [5] E. Buchner, H. Massow, J. Winkler u. A.: „Technische Mechanik für Ingenieurschulen“, Bd. II, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1965, S. 283 – 285. [6] K.-H. Grote, J. Feldhusen: „Dubbel, Taschenbuch für Maschinenbau“, Springer, 2011, 23. Auflage, Kapitel C, S. 22.	
19	Koeffizient $c = k \cdot g$ coefficient	$c_B = k \cdot g_B [-]$	$c_M = k \cdot g_M [-]$
20	Gesuchte Größen wanted parameters	Schraube / bolt (screw)	Mutter / nut
21	Moment /moment	$M_B(x) [Nmm]$	$M_M(x) [Nmm]$
22	Querkraft / shear force	$Q_B(x) [N]$	$Q_M(x) [N]$
23	Streckenlast / Lastverteilung line load / load distribution	$q_B(x) [N/mm]$	$q_M(x) [N/mm]$
24	Querkraftgradient line load gradient	$Q'_B [N/mm]$	$Q'_M [N/mm]$
25	Steifigkeit stiffness	$c_{GB} [N/mm]$	$c_{GM} [N/mm]$
26	Gesamtsteifigkeit complete stiffness of thread	$c_G [N/mm]$	
27	Indices		
28	Kraft / force	...F	
29	Schraube / bolt (screw)	...B	
30	Mutter / nut	...M	
31	infolge Biegespannung due to bending stress	... σ	
32	infolge Schubspannung due to shear stress	... τ	
33	infolge Moment due to moment	...M	
34	infolge Querkraft due to shear force	...Q	
35	Querkraftverteilung distribution of load	$Q'(x) = f(F, E, P, \beta)$	
36	Bedingung für gleiche Belastung der Gewinde (Schraube und Mutter) condition for the same load (on bolt and nut)	$F = \left \int_0^l Q'_B(x) dx \right = \left \int_0^l Q'_M(x) dx \right $	

D		
1	Problem	Die wirkende Kraft $F = F_G$ ist bekannt, aber nicht deren Verteilung $q(x)$ und die entsprechende Reaktionskraft im Träger $Q'(x)$. The acting force F is known - but its distribution $q(x)$ and the associated reaction force in the beam $Q'(x)$ are unknown.



E			
1	Zusammenhang der Querkräfte correlation of the shear forces	$Q_M(x) - Q_B(x) = +F$ $Q_B(x) - Q_M(x) = -F$	Hinweis: $Q_{M(x)} \oplus$ und $Q_{B(x)} \ominus$ sind entgegengesetzt gerichtet Note: $Q_{M(x)} \oplus$ and $Q_{B(x)} \ominus$ are oppositely directed
2	Zusammenhang der Querkräfte correlation of the shear forces	$\frac{dQ_B}{dx} = Q'_B(x) \rightarrow dQ_B = +Q'_B(x) \cdot dx$	$\frac{dQ_M}{dx} = Q'_M(x) \rightarrow dQ_M = dQ'_M(x) \cdot dx$
3	Randbedingungen boundary conditions	$\frac{dQ_B}{dx} = \frac{dQ_M}{dx}$ $Q'_B = Q'_M$	
4		Die Vorzeichen von $Q_B(x)$ und $Q_M(x)$ ergeben sich aus der spiegelbildlichen Belastung und den gegenüberliegenden Einspannungen, mit denen die Integrationskonstanten festgelegt werden. The sign of $Q_B(x)$ und $Q_M(x)$ result from the mirrored load and the opposite clamping of the beams, with whom the integration constants are determined.	
5		$Q_B(x=0) = -F, \quad Q_B(x=l) = 0$	$Q_M(x=l) = +F, \quad Q_M(x=0) = 0,$
6		$Q'_B(x=0) = 0, \quad Q'_B(x=l) = 0,$	$Q'_M(x=l) = 0, \quad Q'_M(x=0) = 0$
7		$Q''_B(x=0) = 0, \quad Q''_B(x=l) = 0$	$Q''_M(x=0) = 0, \quad Q''_M(x=l) = 0$
8	Verlauf der Querkraft Richtung der Kraft beachten! Shear force Note the direction of force!	$Q_B(x) = \int Q'_B(x) dx = \int Q'_M(x) dx + C_{MQ} = Q_M(x) + C_{MQ} =$ $\underbrace{Q_B(x=0)}_{=-F} = \underbrace{Q_M(x=0)}_{=0} + C_{MQ}$ $C_{MQ} = -F$ $Q_B(x) = Q_M(x) - F$	
9		Schraube / bolt	Mutter / nut
10	Festlegungen arranging of the correlation of shear forces	$Q_B(x) = +Q_M(x) - F$	$\frac{dM_M}{dx} = Q_M(x)$
11	Momente Drehrichtung beachten Moments note the direction of bending moments	$\frac{dM_B}{dx} = +Q_B(x)$	$\frac{dM_M}{dx} = Q_M(x)$
12	Verlauf der Momente course of moments <u>gleiche Drehrichtung der Biegemomente, entgegengesetzte Richtung der Querkraft beachten!</u> <u>Note the same direction of bending moments and the opposite direction of shear forces</u>	$M_B(x) = - \int Q_M(x) dx + F \cdot x + C_{BM}$ $M_B(x) = -M_M(x) + F \cdot x + C_{BM}$ $M_B(x=l) = -M_M(x=l) + F \cdot l + C_{BM} = 0$ $M_M(x=l) = M_{Ml}$ allgemein nicht bekannt, Iteration erforderlich! Generally unknown Iteration necessary <u>Sonderfall:</u> $\frac{E_M}{E_B} = 1 \Rightarrow M_{Ml} = F \cdot \frac{l}{2}$ <u>Special case</u> Ausgangswert für Iteration / start value for iteration $C_{BM} = -l \cdot F + M_{Ml}$ $M_B(x) = - \int Q_M(x) dx - F \cdot x + l \cdot F + M_{Ml}$ $M_B(x) = - \int Q_M(x) dx - F \cdot (l-x) + M_{Ml}$	$M_M(x) = \int Q_M(x) dx + C_{MM}$ $M_M(x=0) = 0 \rightarrow C_{MM} = 0$ $M_M(x) = \int Q_M(x) dx$

F			
1	Ausgangsgleichungen für die Ermittlung der Verformungen basic equations for determination of the deformations		
2	Krümmung infolge Biegung bending	$w''_{B\sigma}(x) = \frac{M_B(x)}{E_B \cdot I_B(x)} = \frac{\int Q_B(x) dx}{E_B \cdot I_B(x)}$	$w''_{M\sigma}(x) = \frac{M_M(x)}{E_M \cdot I_M(x)} = \frac{\int Q_M(x) dx}{E_M \cdot I_M(x)}$
3	Neigung infolge Schub gradient due to shear stress	$w'_{B\tau}(x) = \frac{Q_B(x)}{G_B \cdot A_{SB}(x)}$	$w'_{M\tau}(x) = - \frac{Q_M(x)}{G_M \cdot A_{SM}(x)}$
4	Krümmung infolge Schub b ending due to shear stress	$w''_{B\tau}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{Q_B(x)}{G_B \cdot A_{SB}(x)} \right) = \frac{1}{G_B} \cdot \frac{Q'_B(x) \cdot A_{SB}(x) - Q_B(x) \cdot A'_{SB}(x)}{A_{SB}^2(x)}$	$w''_{M\tau}(x) = - \frac{d}{dx} \left(\frac{Q_M(x)}{G_M \cdot A_{SM}(x)} \right) = - \frac{1}{G_M} \cdot \frac{Q'_M(x) \cdot A_{SM}(x) - Q_M(x) \cdot A'_{SM}(x)}{A_{SM}^2(x)}$
5	Bekannter Zusammenhang known correlation	$w'_B(x) = w'_{B\sigma}(x) + w'_{B\tau}(x)$	$w'_M(x) = w'_{M\sigma}(x) + w'_{M\tau}(x)$

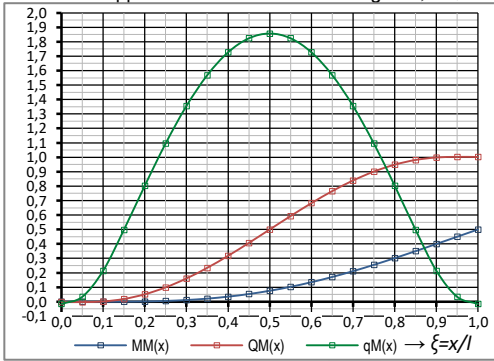
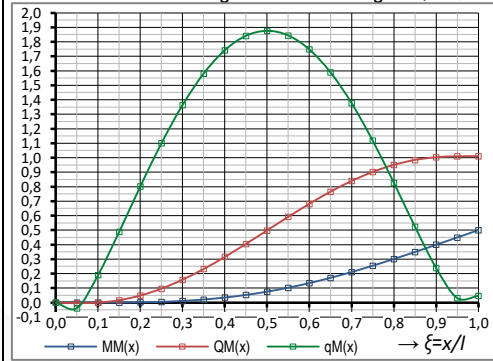


6		$w_B''(x) = w_{B\sigma}''(x) + w_{B\tau}''(x)$	$w_M''(x) = w_{M\sigma}''(x) + w_{M\tau}''(x)$
7		$w_B''(x) = \frac{1}{E_B} \cdot \frac{M_B(x)}{I_B(x)} + \frac{1}{G_B} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{Q_B(x)}{A_{SB}(x)} \right)$	$w_M''(x) = \frac{1}{E_M} \cdot \frac{M_M(x)}{I_M(x)} + \frac{1}{G_M} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{Q_M(x)}{A_{SM}(x)} \right)$

G			
1	Differentialgleichungen zur weiteren Bearbeitung	$w_B''(x) = \frac{1}{E_B} \cdot \frac{M_B(x)}{I_B(x)} + \frac{1}{G_B} \cdot \frac{Q_B'(x) \cdot A_{SB}(x) - Q_B(x) \cdot A_{SB}'(x)}{A_{SB}^2(x)}$	$w_M''(x) = \frac{1}{E_M} \cdot \frac{M_M(x)}{I_M(x)} + \frac{1}{G_M} \cdot \frac{Q_M'(x) \cdot A_{SM}(x) - Q_M(x) \cdot A_{SM}'(x)}{A_{SM}^2(x)}$
2	differential equations for further processing	$w_B''(x) = + \frac{12}{E_B \cdot B \cdot P^3} \cdot \frac{-\int Q_M(x) dx - F(1-x) + M_{ML}}{(1-\frac{x}{l})^3} + \frac{1}{c_B \cdot E_B \cdot B \cdot P} \cdot \frac{Q_M'(x) \cdot (1-\frac{x}{l}) + Q_M(x) \cdot \frac{1}{l}}{(1-\frac{x}{l})^2}$	$w_M''(x) = + \frac{12}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \frac{\int Q_M(x) dx - \frac{1}{c_M \cdot E_M \cdot B \cdot P} \cdot \frac{Q_M'(x) \cdot \frac{x}{l} - Q_M(x) \cdot \frac{1}{l}}{(\frac{x}{l})^2}$
3			
4	Krümmung bending condition	$w_B''(x) = w_M''(x)$	
5	$\times B \cdot P$	$+ \frac{12}{E_B \cdot B \cdot P^3} \cdot \frac{-\int Q_M(x) dx - F(1-x) + M_{ML}}{(1-\frac{x}{l})^3} + \frac{1}{c_B \cdot E_B \cdot B \cdot P} \cdot \frac{Q_M'(x) \cdot (1-\frac{x}{l}) + Q_M(x) \cdot \frac{1}{l}}{(1-\frac{x}{l})^2} = + \frac{12}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \frac{\int Q_M(x) dx - \frac{1}{c_M \cdot E_M \cdot B \cdot P} \cdot \frac{Q_M'(x) \cdot \frac{x}{l} - Q_M(x) \cdot \frac{1}{l}}{(\frac{x}{l})^2}$	
6		$-\left(\frac{12}{E_B \cdot P^2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^3} + \frac{12}{E_M \cdot P^2} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^3} \right) \cdot \int Q_M(x) dx + \left(\frac{1}{c_B \cdot E_B} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} - \frac{1}{c_M \cdot E_M} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M'(x) + \left(\frac{1}{c_B \cdot E_B} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} + \frac{1}{c_M \cdot E_M} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M(x) - \frac{12 \cdot l}{E_B \cdot P^2} \cdot \frac{F}{(1-\frac{x}{l})^2} - \frac{F}{c_B \cdot E_B \cdot l} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} + \frac{12 \cdot M_{ML}}{E_B \cdot P^2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} = 0$	
7		$-\left(\frac{12}{E_B \cdot P^2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^3} + \frac{12}{E_M \cdot P^2} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^3} \right) \cdot \int Q_M(x) dx + \left(\frac{1}{c_B \cdot E_B} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} - \frac{1}{c_M \cdot E_M} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M'(x) + \left(\frac{1}{c_B \cdot E_B} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} + \frac{1}{c_M \cdot E_M} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M(x) - \left(\frac{12 \cdot l}{E_B \cdot P^2} + \frac{1}{c_B \cdot E_B \cdot l} \right) \cdot \frac{F}{(1-\frac{x}{l})^2} + \frac{12 \cdot M_{ML}}{E_B \cdot P^2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} = 0$	
8	$\times E_M; \bar{E} = \frac{E_M}{E_B}$	$-\frac{12}{P^2} \cdot \left(\frac{1}{(1-\frac{x}{l})^3} + \frac{1}{(\frac{x}{l})^3} \right) \cdot \int Q_M(x) dx + \left(\frac{1}{c_B \cdot l} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} + \frac{1}{c_M \cdot l} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M'(x) + \left(\frac{1}{c_B \cdot l} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} + \frac{1}{c_M \cdot l} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M(x) - \left(\frac{12 \cdot l}{P^2} + \frac{1}{c_B \cdot l} \right) \cdot \frac{F}{(1-\frac{x}{l})^2} + \bar{E} \cdot \frac{12 \cdot M_{ML}}{P^2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} = 0$	
9		$-\frac{12}{P^2} \cdot \left(\frac{1}{(1-\frac{x}{l})^3} + \frac{1}{(\frac{x}{l})^3} \right) \cdot \int Q_M(x) dx + \left(\frac{1}{c_B \cdot l} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} - \frac{1}{c_M \cdot l} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M'(x) + \left(\frac{1}{c_B \cdot l} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} + \frac{1}{c_M \cdot l} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M(x) - \left(\frac{12 \cdot l}{P^2} + \frac{1}{c_B \cdot l} \right) \cdot \frac{F}{(1-\frac{x}{l})^2} + \bar{E} \cdot \frac{12 \cdot M_{ML}}{P^2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} = 0$	
10	Singularitäten beseitigen: Elimination of singularities $\times \frac{P^2}{12} \cdot (1-\frac{x}{l})^3 \cdot (\frac{x}{l})^3$	$-\frac{12}{P^2} \cdot \left(\frac{1}{(1-\frac{x}{l})^3} + \frac{1}{(\frac{x}{l})^3} \right) \cdot \int Q_M(x) dx + \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{1}{c_B} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} - \frac{1}{c_M} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M'(x) + \left(\frac{1}{c_B} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{l})^2} + \frac{1}{c_M} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{l})^2} \right) \cdot Q_M(x) - \left(l + \frac{P^2}{12 \cdot c_B \cdot l} \right) \cdot \left((1-\frac{x}{l}) \cdot (\frac{x}{l}) \right) \cdot F \cdot l + \bar{E} \cdot M_{ML} \cdot (\frac{x}{l})^3 = 0$	
11	Dimensionslose Gleichung dimensionless equation $\bar{Q}(x) = \frac{Q(x)}{F}; \frac{M_{ML}}{F \cdot l} = \bar{M}_{ML}$ $\xi = \frac{x}{l}, d\xi = \frac{dx}{l}$	$-(\bar{E} \cdot \xi^3 + (1-\xi)^3) \cdot \int \bar{Q}_M(\xi) d\xi + \frac{P^2}{12 \cdot \bar{E} \cdot l^2} \cdot \left(\frac{\bar{E}}{c_M} \cdot \xi^2 - \frac{1}{c_B} \cdot (1-\xi)^2 \right) \cdot (\xi \cdot (1-\xi)) \cdot \bar{Q}_M(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot \bar{E} \cdot l^2} \cdot \left(\frac{\bar{E}}{c_M} \cdot \xi + \frac{1}{c_B} \cdot (1-\xi) \right) \cdot \xi^2 \cdot (1-\xi)^2 \cdot \bar{Q}_M(\xi) - \left(1 + \frac{P^2}{12 \cdot c_B \cdot l^2} \right) \cdot (1-\xi) \cdot \xi^3 \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \frac{M_{ML}}{F \cdot l} \cdot \xi^3 = 0$	
12	Mit: $\bar{M}_M(\xi) = \int \bar{Q}_M(\xi) d\xi$	$-(\bar{E} \cdot \xi^3 + (1-\xi)^3) \cdot \bar{M}_M(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot \bar{E} \cdot l^2} \cdot \left(\frac{\bar{E}}{c_M} \cdot \xi^2 - \frac{1}{c_B} \cdot (1-\xi)^2 \right) \cdot (\xi \cdot (1-\xi)) \cdot \bar{M}_M(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot \bar{E} \cdot l^2} \cdot \left(\frac{\bar{E}}{c_M} \cdot \xi + \frac{1}{c_B} \cdot (1-\xi) \right) \cdot (\xi^2 \cdot (1-\xi)^2) \cdot \bar{M}_M(\xi) - \bar{E} \cdot \xi^3 \cdot \left\{ \left(1 + \frac{P^2}{12 \cdot c_B \cdot l^2} \right) \cdot (1-\xi) - \bar{M}_{ML} \right\} = 0$	
13		$-(\bar{E} \cdot \xi^3 + (1-\xi)^3) \cdot \bar{M}_M(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot \bar{E} \cdot l^2} \cdot \left(\frac{\bar{E}}{c_M} \cdot \xi^2 - \frac{1}{c_B} \cdot (1-\xi)^2 \right) \cdot (\xi \cdot (1-\xi)) \cdot \bar{M}_M(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot \bar{E} \cdot l^2} \cdot \left(\frac{\bar{E}}{c_M} \cdot \xi + \frac{1}{c_B} \cdot (1-\xi) \right) \cdot (\xi^2 \cdot (1-\xi)^2) \cdot \bar{M}_M(\xi) - \bar{E} \cdot \xi^3 \cdot \left\{ \left(1 + \frac{P^2}{12 \cdot c_B \cdot l^2} \right) \cdot (1-\xi) - \bar{M}_{ML} \right\} = 0$	
14	$C = C_B \approx C_M$	$-(\bar{E} \cdot \xi^3 + (1-\xi)^3) \cdot \bar{M}_M(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot \bar{E} \cdot l^2} \cdot (\bar{E} \cdot \xi^2 - (1-\xi)^2) \cdot (\xi \cdot (1-\xi)) \cdot \bar{M}_M(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot \bar{E} \cdot l^2} \cdot ((\bar{E} \cdot \xi + (1-\xi)) \cdot (\xi^2 \cdot (1-\xi)^2)) \cdot \bar{M}_M(\xi) - \bar{E} \cdot \xi^3 \cdot \left\{ \left(1 + \frac{P^2}{12 \cdot c_B \cdot l^2} \right) \cdot (1-\xi) - \bar{M}_{ML} \right\} = 0$	
15	info	$ \bar{Q}_M(\xi) , \bar{Q}_B(\xi) \leq 1,0, \quad 0,5 \leq \bar{E} \leq 2,5$	
16	Feststellung declaration	Die exakte Lösung dieser inhomogen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten führt über die Lösung der homogenen DGL und ein in diesem Zusammenhang bekanntes partikuläres Integral. Dieses Integral ist nicht bekannt. The result is an inhomogeneous linear differential equation of 2 nd order with variable coefficients. A solution of this equation is unknown.	

H			
1	Lösungsansatz solution for approach	Die Gleichung wird deshalb mit einer direkten Differenzenapproximation gelöst The equation is to be solved by the direct difference method.	
2	Für / for $\xi = \xi_i$ gilt	$\bar{M}_M(\xi) = \bar{M}_M(\xi_i)$	
3	Direkte Differenzenapproximation Gleichungen nach Collatz the direct difference approximating method of Collatz	$\bar{M}'_M(\xi = \xi_i) = (\bar{M}_M(\xi_{i+1}) - \bar{M}_M(\xi_{i-1})) / (2 \cdot \Delta\xi)$	
4		$\bar{M}'_M(\xi = \xi_i) = (\bar{M}_M(\xi_{i+1}) - \bar{M}_M(\xi_i)) / \Delta\xi$ am Rand	
5		$\bar{M}''_M(\xi = \xi_i) = (\bar{M}_M(\xi_{i-1}) - 2 \cdot \bar{M}_M(\xi_i) + \bar{M}_M(\xi_{i+1})) / \Delta\xi^2$	
6		$\bar{M}''_M(\xi = \xi_i) = (2 \cdot \bar{M}_M(\xi_i) - 5 \cdot \bar{M}_M(\xi_{i+1}) + 4 \cdot \bar{M}_M(\xi_{i+2}) - \xi(\xi_{i+3})) / \Delta\xi^2$ Rand / at the Border	
7		[7] Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer-Verlag, Berlin, 1955	
8	Numerische Integration Trapezformel Trapezoidal formula	$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi = \frac{\Delta\xi}{2} \cdot (f(\xi_1) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_1 + k \cdot \Delta\xi) + f(\xi_2))$ mit $\Delta\xi = \frac{\xi_2 - \xi_1}{n-1}$ bzw. $n = 1 + \frac{\xi_2 - \xi_1}{\Delta\xi}$	
9			
10	Näherungsverfahren zur Lösung der Differential Gleichung approximation of the solution of the differential equation	Mit diesen Gleichungen kann ein lineares Gleichungssystem auf der Grundlage der o. a. Gleichungen aufgestellt werden, welches mit dem Gaußschen Algorithmus lösbar ist. Der Lösungsansatz führt zu guten Ergebnissen für $\bar{M} = f(\xi)$. $\bar{Q}(\xi)$ und $\bar{Q}'(\xi)$ müssen durch numerische Differentiation ermittelt werden. Da es sich um ein Näherungsverfahren handelt, sind in den Randbereichen geringfügige Abweichungen hinsichtlich des Einlaufens der Lösung für $\bar{M} = f(\xi \rightarrow 0)$ und $\bar{M} = f(\xi \rightarrow 1)$ festzustellen, die aber erst bei der Ermittlung von $\bar{Q}(x)$ und $\bar{Q}'(x)$ durch numerische Differentiation sichtbar werden. Diese Abweichungen haben nur geringe Auswirkungen auf das Ergebnis. It is possible to make a linear system of equations by using of the a.m. equations. This linear system of equations can be solved by the Gauss algorithm. It is an approximation method, therefore minor deviations particularly for $\bar{M} = f(\xi \rightarrow 0)$ and $\bar{M} = f(\xi \rightarrow 1)$ may occur, which become noticeable when the equations are differentiated. The deviations have an insignificant influence on the final results.	



11	Vergleich / comparison	Moment, Querkraft und Streckenlast der Mutter Berechnung mit der direkten Differenzenapproximation Moment, shear force, load distribution of the nut calculated by difference approximation $\bar{E} = \frac{E_M}{E_B} = 1, \bar{M}_L = 0,5, \beta = 60^\circ, k = 5/6, g = 1/2,6$	Moment, Querkraft und Streckenlast der Mutter genähert mit einer Potenzreihenentwicklung Moment, shear force, load distribution of the nut calculated by developing in a potency series $\bar{E} = \frac{E_M}{E_B} = 1, \bar{M}_L = 0,5, \beta = 60^\circ, k = 5/6, g = 1/2,6$
12		Differenzenapproximation mit 21 Gleichungen $\Delta\xi = 0,05$ 	Potenzreihenentwicklung mit 21 Gleichungen $\Delta\xi = 0,05$ 
13			
14	Sonderfall für $\frac{E_M}{E_B} = 1$ Special case	Auf Grund der Symmetrie von Geometrie und Material ist: The following equation is valid due to symmetric and material reasons:	$\bar{M}_{Ml}(\frac{E_M}{E_B} = 1) = 0,5$
15	Allgemein $\frac{E_M}{E_B} \neq 1$ General case	Für / for $0,5 \leq \frac{E_M}{E_B} \leq 2,0$ ist / is ermittelt durch Variationsrechnungen / determined by variational calculations	$\bar{M}_{Ml}(\frac{E_M}{E_B}) \approx 0,5 + 0,12046404 \cdot \ln(\frac{E_M}{E_B})$

I			
1	Verformungen / Biegelinie deformation / bending line		
2	Mutter / nut	Biegebeanspruchung / bending load	Schubbeanspruchung / shear force load
3	$\bar{M}_M(\xi) = \frac{M_M(\xi)}{F \cdot l}, \bar{w}_{B\sigma}'' = \frac{w_{B\sigma}''(\xi)}{(1-\xi)^3}$	$w_{M\sigma}''(\xi) = \frac{M_M(\xi)}{E_M \cdot I_B(\xi)} = \frac{12 \cdot F \cdot l}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \frac{\bar{M}_M(\xi)}{\xi^3} = \frac{12 \cdot F \cdot l}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \bar{w}_{M\sigma}''(\xi)$	
4	$\bar{Q}_M = \frac{Q_M(\xi)}{F}$ $\bar{w}_{M\sigma}' = \int \bar{w}_{M\sigma}'' d\xi + \bar{C}_{M'\sigma}$ $\bar{w}_{M\tau}'(\xi) = \frac{Q_M(\xi)}{\xi}$	$w_{M\sigma}'(\xi) = \int w_{M\sigma}''(\xi) d\xi + C_{M'\sigma} = \frac{12 \cdot F \cdot l^2}{E_M \cdot U \cdot P^3} \cdot \left\{ \int \frac{\bar{M}_M(\xi)}{\xi^3} d\xi + \bar{C}_{M'\sigma} \right\}$ $w_{M\sigma}'(\xi = 1) = \frac{12 \cdot F \cdot l^2}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{\bar{M}_M(\xi)}{\xi^3} d\xi + \bar{C}_{M'\sigma} \right\} = 0$ $\bar{C}_{M'\sigma} = - \int_0^1 \frac{\bar{M}_M(\xi)}{\xi^3} d\xi$	$w_{M\tau}'(\xi) = \frac{Q_M(\xi)}{c \cdot E_M \cdot A_M(\xi)}$ $w_{M\tau}'(\xi) = \frac{F}{c \cdot E_M \cdot B \cdot P} \cdot \frac{\bar{Q}_M(\xi)}{\xi}$
5	$\bar{w}_{M\sigma}(\xi) = \left\{ \int \bar{w}_{M\sigma}' d\xi + \bar{C}_{M\sigma} \right\}$	$w_{M\sigma}(\xi) = \frac{12 \cdot F \cdot l^3}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \left\{ \int \bar{w}_{M\sigma}' d\xi + \bar{C}_{M\sigma} \right\}$ $w_{M\sigma}(\xi = 1) = \int_0^1 \bar{w}_{M\sigma}'(\xi) d\xi + \bar{C}_{M\sigma} = 0$ $\bar{C}_{M\sigma} = - \int_0^1 \bar{w}_{M\sigma}'(\xi) d\xi = -w_{M\sigma}(\xi = 0)$	$w_{M\tau}(\xi) = \frac{F \cdot l}{c \cdot E_M \cdot B \cdot P} \cdot \left\{ \int \frac{\bar{Q}_M(\xi)}{\xi} d\xi + \bar{C}_{Q\tau} \right\}$ $w_{M\tau}(\xi = 1) = +\bar{C}_{Q\tau} = 0$ $\bar{C}_{M\tau} = - \int_0^1 \frac{\bar{Q}_M(\xi)}{\xi} d\xi = -w_{M\tau}(\xi = 0)$
6		$w_M(\xi) = \left\{ \frac{12 \cdot F \cdot l^3}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \bar{w}_{M\sigma}(\xi) + \frac{F \cdot l}{c \cdot E_M \cdot B \cdot P} \cdot \bar{w}_{M\tau}(\xi) \right\} = \frac{12 \cdot F \cdot l^3}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \left\{ \bar{w}_{M\sigma}(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot c \cdot l^2} \cdot \bar{w}_{M\tau}(\xi) \right\}$	
7	Schraube / bolt	Analoge Verfahrensweise wie für die Mutter / analogous procedure as for the nut	
8	$\bar{E} = \frac{E_M}{E_B}, E_B = \frac{E_M}{\bar{E}}, E_B = \bar{E} \cdot E_M$ $\bar{M}_B(\xi) = \frac{M_B(\xi)}{F \cdot l}, \bar{w}_{B\sigma}'' = \frac{w_{B\sigma}''(\xi)}{(1-\xi)^3}$	$w_{B\sigma}''(\xi) = \frac{M_B(\xi)}{E_B \cdot I_B(\xi)} = \frac{12 \cdot F \cdot l}{E_B \cdot B \cdot P^3} \cdot \frac{\bar{M}_B(\xi)}{(1-\xi)^3} = \frac{12 \cdot F \cdot l}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \bar{E} \cdot \left\{ \frac{\bar{M}_B(\xi)}{(1-\xi)^3} \right\}$	
9	$\bar{Q}_{BV} = \frac{Q_B(\xi)}{F}$ $\bar{w}_{B\sigma}' = \int \bar{w}_{B\sigma}'' d\xi + \bar{C}_{B'\sigma}$ $\bar{w}_{B\tau}'(\xi) = \frac{Q_B(\xi)}{1-\xi}$	$w_{B\sigma}'(\xi) = \int w_{B\sigma}''(\xi) d\xi + C_{B'\sigma} = \frac{12 \cdot F \cdot l^2}{E_B \cdot U \cdot P^3} \cdot \bar{E} \cdot \left\{ \int \frac{\bar{M}_B(\xi)}{(1-\xi)^3} d\xi + \bar{C}_{B'\sigma} \right\}$ $w_{B\sigma}'(\xi = 0) = \frac{12 \cdot F \cdot l^2}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \bar{E} \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{\bar{M}_B(\xi)}{(1-\xi)^3} d\xi + \bar{C}_{B'\sigma} \right\} = 0$ $\bar{C}_{B'\sigma} = - \int_0^1 \frac{\bar{M}_B(\xi)}{(1-\xi)^3} d\xi$	$w_{B\tau}'(\xi) = \frac{Q_B(\xi)}{g \cdot E_B \cdot k \cdot A_B(\xi)}$ $w_{B\tau}'(\xi) = \frac{F}{c \cdot E_M \cdot B \cdot P} \cdot \bar{E} \cdot \frac{\bar{Q}_B(\xi)}{1-\xi}$ $\bar{w}_{B\tau}'(\xi) = \bar{E} \cdot w_{B\tau}'(\xi) = \bar{E} \cdot \frac{\bar{Q}_B(\xi)}{1-\xi}$
10		$w_{B\sigma}(\xi) = \frac{12 \cdot F \cdot l^3}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \bar{E} \cdot \left\{ \int \bar{w}_{B\sigma}' d\xi + \bar{C}_{B\sigma} \right\} = \frac{12 \cdot F \cdot l^3}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \frac{1}{\bar{E}} \cdot \bar{w}_{B\sigma}$ $\bar{w}_{B\sigma}(\xi = 0) = \int_0^1 \bar{w}_{B\sigma}'(\xi) d\xi + \bar{C}_{B\sigma} = 0$ $\bar{C}_{B\sigma} = 0$	$w_{B\tau}(\xi) = \frac{F \cdot l}{c \cdot E_M \cdot B \cdot P} \cdot \bar{E} \cdot \left\{ \int \bar{w}_{B\tau}'(\xi) d\xi + \bar{C}_{B\tau} \right\} = \frac{F \cdot l}{c \cdot E_M \cdot B \cdot P} \cdot \bar{w}_{B\tau}(\xi)$ $\bar{w}_{B\tau}(\xi = 1) = \int_0^1 \bar{w}_{B\tau}'(\xi) d\xi + \bar{C}_{B\tau} = 0$ $\bar{C}_{B\tau} = - \int_0^1 \bar{w}_{B\tau}'(\xi) d\xi$
11			
12		Schraube / bolt	Mutter / nut
13	$\bar{E} = \frac{E_M}{E_B}$	$w_B(\xi) = \frac{12 \cdot F \cdot l^3}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \bar{E} \cdot \left\{ \bar{w}_{B\sigma}(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot c \cdot l^2} \cdot \bar{w}_{B\tau}(\xi) \right\}$	$w_M(\xi) = \frac{1}{E_M} \cdot \frac{12 \cdot F \cdot l^3}{B \cdot P^3} \cdot \left\{ \bar{w}_{M\sigma}(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot c \cdot l^2} \cdot \bar{w}_{M\tau}(\xi) \right\}$
14		$w_B(\xi) \cdot \frac{E_M \cdot B \cdot P^3}{12 \cdot F \cdot l^3} = \bar{E} \cdot \left\{ \bar{w}_{B\sigma}(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot c \cdot l^2} \cdot \bar{w}_{B\tau}(\xi) \right\}$	$w_M(\xi) \cdot \frac{E_M \cdot B \cdot P^3}{12 \cdot F \cdot l^3} = \left\{ \bar{w}_{M\sigma}(\xi) + \frac{P^2}{12 \cdot c \cdot l^2} \cdot \bar{w}_{M\tau}(\xi) \right\}$
18			

J			
1	Steifigkeit des Gewindes	Die Steifigkeit ist definiert durch die Verschiebung der Kraft an ihrem Angriffspunkt ξ_F für das	



	Stiffness of thread	Schrauben- und Muttergewinde. Der Kraftangriffspunkt ξ_F befindet sich auf Grund des spiegelbildlichen Streckenlastverlaufs $Q'(\xi)$ für Mutter und Schraube an gleicher Stelle. The stiffness of thread is defined by the offset of the force at its point of application for the thread of bolt and nut. The point of force application is located at the same point for the thread of bolt and nut.
2	Kraftangriffspunkt Point of force application	$\xi_F = 1 - \frac{M_{MI}}{F \cdot l} = 1 - \bar{M}_{MI}$
3	Steifigkeit stiffness	$C_{GB} = \frac{F}{ w_B(\xi = \xi_F) }$ $C_{GM} = \frac{F}{ w_M(\xi = \xi_F) }$
4	Verformung deformation	$w_B(\xi_F) = \frac{12 \cdot F \cdot l^3}{E_B \cdot B \cdot P^3} \cdot \bar{w}_B(\xi_F)$ $w_M(\xi_F) = \frac{12 \cdot F \cdot l^3}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot \bar{w}_M(\xi_F)$
5	$E_B = \frac{E_M}{\bar{E}}$	$\frac{1}{C_G} = \frac{1}{C_{GM}} + \frac{1}{C_{GB}} = \frac{12 \cdot l^3}{B \cdot P^3} \cdot \left(\frac{1}{E_M} \cdot \bar{w}_M(\xi_F) + \frac{1}{E_B} \cdot \bar{w}_B(\xi_F) \right) = \frac{12 \cdot l^3}{E_M \cdot B \cdot P^3} \cdot (\bar{w}_M(\xi_F) + \bar{E} \cdot \bar{w}_B(\xi_F))$
6		$C_G = \frac{E_M \cdot B \cdot P^3}{12 \cdot l^3} \cdot \frac{1}{ \bar{w}_M(\xi_F) + \bar{E} \cdot \bar{w}_B(\xi_F) }$
7		
8	Metrisches Gewinde	$C_G = \frac{E_M \cdot \pi \cdot \frac{d_2}{2}}{12 \cdot \cos^3 30^\circ} \cdot \frac{1}{ \bar{w}_M(\xi_F) + \bar{E} \cdot \bar{w}_B(\xi_F) }$ mit $\frac{l}{P} = \cos 30^\circ$, $B \approx \pi \cdot \frac{d_2}{2}$
9	$\frac{l}{P} = \cos \frac{\beta}{2}$, $U \approx \pi \cdot d_2$	$C_G = 0,2016 \cdot \frac{E_M \cdot d_2}{ \bar{w}_M(\xi_F) + \bar{E} \cdot \bar{w}_B(\xi_F) } = 0,2016 \cdot \frac{E_B \cdot E_M \cdot d_2}{E_B \cdot \bar{w}_M(\xi_F) + E_M \cdot \bar{w}_B(\xi_F) }$
10	Metrisches ISO-Grobgewinde: $d_2 \approx 0,9 \cdot d$ metric coarse thread	$C_G \approx 0,181 \cdot \frac{E_B \cdot E_M \cdot d}{E_B \cdot \bar{w}_M(\xi_F) + E_M \cdot \bar{w}_B(\xi_F) }$
11	Erkenntnisse aus der Deformationsberechnungen findings of the calculations of the deformation	Die Ergebnisse von Biegelinienberechnungen zeigen folgendes: Es entsteht wie erwartet eine Deformation, die entsprechend den Voraussetzungen zu einem Flächenkontakt führt. Folgende Annahmen für die Berechnung sind hierbei erfüllt: The results of the calculations are showing the following: As expected, deformation occurs and leads to surface contact. Hereby, the following assumptions of the calculation are met. $w_B(\xi = 0) = -w_M(\xi = 1) = 0$ $w_B(\xi = 1) = -w_M(\xi = 0)$ $ w_{Bmax} = w_B(\xi = 1) = w_M(\xi = 0) = w_{Mmax} $ <u>Ergebnis von Berechnungen:</u> Die Verschiebung der Kraft für die Berechnung der Gewindesteifigkeit ist <u>Result of calculations:</u> The offset of the force for the calculation of the thread stiffness: $\frac{w_B(\xi=1)}{2} = w_B(\xi_F) = -w_M(\xi_F) = -\frac{w_M(\xi=0)}{2}$ So dass / resulting in $C_G = \frac{E_M \cdot B \cdot P^3}{12 \cdot l^3} \cdot \frac{1}{ \bar{w}_M(\xi_F) \cdot (1 + \bar{E})} = \frac{E_M \cdot B \cdot P^3}{12 \cdot l^3} \cdot \frac{1}{ \bar{w}_B(\xi_F) \cdot (1 + \bar{E})}$ und / and $C_G \approx 0,181 \cdot \frac{E_B \cdot E_M \cdot d}{ \bar{w}_M(\xi_F) \cdot (E_B + E_M)} = 0,181 \cdot \frac{d}{ \bar{w}_B(\xi_F) } \cdot \frac{E_B \cdot E_M}{(E_B + E_M)}$

K		
1	Ergebnisse Results	Ergebnisse von Steifigkeitsberechnungen für metrisches Gewinde Results of stiffness calculations for metric thread
2		
3	Steifigkeit für: stiffness for:	$C_G = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{ \bar{w}_M(\xi_F) + \bar{E} \cdot \bar{w}_B(\xi_F) } = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{0,355 + 2 \cdot 0,355} = 0,170 \cdot E_M \cdot d = 0,340 \cdot E_B \cdot d$
4	$\bar{E} = \frac{E_M}{E_B} = 2$, $E_B = 2 \cdot E_M$ $\frac{l}{P} = \frac{1}{2 \cdot \tan \beta / 2} = \cos 30^\circ$ $k = \frac{5}{6}$, $g = \frac{1}{2,6} \rightarrow c = 0,3205$ $\xi_F = 1 - \bar{M}_{MI} = 0,4165$ $ \bar{w}_M(\xi_F) \approx 0,3550$ $ \bar{w}_B(\xi_F) \approx 0,3550$ $ \bar{w}_{Mmax} = \bar{w}_{Bmax} \approx 0,7100$	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>Moment M, Querkraft Q und Streckenlast Q' für eine metrische Gewindepaarung: E=2 Moment, shear force and load for metric thread (dimensionless/dimensionless)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Dimensionslose Verformung der Gewindeflanken für E=2,0 Dimensionless deformation for E=2,0</p> </div> </div>



6	<p>Steifigkeit für: stiffness for:</p>	$C_G = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{ \bar{w}_M(\xi_F) + \bar{E} \cdot \bar{w}_B(\xi_F) } = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{0,308 + 3/2 \cdot 0,308} = 0,235 \cdot E_M \cdot d = 0,353 \cdot E_B \cdot d$	
7	<p>$\bar{E} = \frac{E_M}{E_B} = 3/2, E_B = 3/2 \cdot E_M$</p> <p>$\frac{l}{P} = \frac{1}{2 \cdot \tan \beta / 2} = \cos 30^\circ$</p> <p>$k = \frac{5}{6}, g = \frac{1}{2,6} \rightarrow c = 0,3205$</p> <p>$\xi_F = 1 - \bar{M}_{Ml} = 0,451$</p> <p>$\bar{w}_M(\xi_F) \approx 0,308$ $\bar{w}_B(\xi_F) \approx 0,308$ $\bar{w}_{Mmax} = \bar{w}_{Bmax} \approx 0,6157$</p>		
9	<p>Steifigkeit für: stiffness for:</p> <p>$\bar{E} = \frac{E_M}{E_B} = 1, E = E_M = E_B, \bar{E} = 1$</p> <p>$\frac{l}{P} = \frac{1}{2 \cdot \tan \beta / 2} = \cos 30^\circ$</p> <p>$k = \frac{5}{6}, g = \frac{1}{2,6} \rightarrow c = 0,3205$</p> <p>$\xi_F = 1 - \bar{M}_{Ml} = 0,5$</p> <p>$\bar{w}_M(\xi_F) = \bar{w}_B(\xi_F) = 0,25$ $\bar{w}_M(0) = \bar{w}_B(1) = 0,50$</p>	$C_G = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{ \bar{w}_M(\xi_F) + \bar{E} \cdot \bar{w}_B(\xi_F) } = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{0,25 + 1 \cdot 0,25} = 0,362 \cdot E \cdot d$	
10			
12	<p>Steifigkeit für: stiffness for:</p> <p>$\bar{E} = \frac{E_M}{E_B} = 2/3, E_M = 2/3 \cdot E_B$</p> <p>$\frac{l}{P} = \frac{1}{2 \cdot \tan \beta / 2} = \cos 30^\circ$</p> <p>$k = \frac{5}{6}, g = \frac{1}{2,6} \rightarrow c = 0,3205$</p> <p>$\xi_F = 1 - \bar{M}_{Ml} \approx 0,5488$</p> <p>$\bar{w}_M(\xi_F) \approx 0,2052$ $\bar{w}_B(\xi_F) \approx 0,2052$ $\bar{w}_M(0) = \bar{w}_B(1) \approx 0,4104$</p>	$C_G = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{ \bar{w}_M(\xi_F) + \bar{E} \cdot \bar{w}_B(\xi_F) } = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{0,2052 + \frac{2}{3} \cdot 0,2052} = 0,529 \cdot E_M \cdot d = 0,353 \cdot E_B \cdot d$	
14	<p>Steifigkeit für: stiffness for:</p> <p>$\bar{E} = \frac{E_M}{E_B} = 1/2, E_M = 1/2 \cdot E_B$</p>	$C_G = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{ \bar{w}_M(\xi_F) + \bar{E} \cdot \bar{w}_B(\xi_F) } = 0,181 \cdot \frac{E_M \cdot d}{0,1776 + \frac{1}{2} \cdot 0,1776} = 0,679 \cdot E_M \cdot d = 0,340 \cdot E_B \cdot d$	
15	<p>$\frac{l}{P} = \frac{1}{2 \cdot \tan \beta / 2} = \cos 30^\circ$</p>		
16	<p>$k = \frac{5}{6}, g = \frac{1}{2,6} \rightarrow c = 0,3205$</p>		
17	<p>$\xi_F = 1 - \bar{M}_{Ml} \approx 0,5835$</p>		
18	<p>$\bar{w}_M(\xi_F) \approx 0,1776$ $\bar{w}_B(\xi_F) \approx 0,1776$</p>		
19	<p>$\bar{w}_M(0) = \bar{w}_B(1) \approx 0,3552$</p>		
20			



M	<p>Auswertung von Ergebnissen evaluation of the results</p>	<div data-bbox="470 212 1268 851" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;">Dimensionslose Deformation $w^*(EM/EB)$ und Näherungsfunktion Dimensionless deformation and approximate function</p> </div> <p>Die dimensionslose Steifigkeit kann durch eine Näherungsfunktion wiedergegeben werden. Diese Näherung basiert auf den vorherigen 5 Berechnungsbeispielen und ist im Kern eine Funktion der dimensionslosen Verformung $\bar{w}_M(\xi_F) = \bar{w}_B(\xi_F) = \bar{w}(\xi_F)$.</p> <p>Die dimensionslose Verformung kann genähert werden durch die Hyperbel-Gleichung: The dimensionless stiffness can be represented by an approximate function. This approximation is based on the previous calculation five examples and is essentially a function of the dimensionless deformation $\bar{w}_M(\xi_F) = \bar{w}_B(\xi_F) = \bar{w}(\xi_F)$. The dimensionless deformation can be approximated by the hyperbola equation:</p> $\bar{w}(\xi_F) \approx 0,25 \cdot \left(\frac{E_M}{E_B}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0,25 \cdot \bar{E}^{-\frac{1}{2}}$ <p>Nachvollziehbar ist $C_G \left(\frac{E_M}{E_B}\right) = C_G \left(\frac{E_B}{E_M}\right) = C_G \left(\frac{E_{max}}{E_{min}}\right) = C_G \left(\frac{E_{min}}{E_{max}}\right)$</p> <p>Die weitere Berechnung folgt der Variante / the following calculation is made by the variant</p> $C_G \left(\frac{E_{max}}{E_{min}}\right) \text{ mit / with } \bar{E}_{max} = \frac{E_{max}}{E_{min}}, E_{max} = MAX(E_B, E_M), E_{min} = MIN(E_B, E_M)$ <p>Damit ergibt sich die Gewindesteifigkeit zu / the stiffness of thread is therefore</p> $C_G \approx 0,181 \cdot \frac{E_B \cdot E_M \cdot d}{ \bar{w}_M(\xi_F) \cdot (E_B + E_M)} = 0,181 \cdot \frac{E_{min} \cdot E_{max} \cdot d}{ \bar{w}_M(\xi_F) \cdot (E_{min} + E_{max})} = 0,181 \cdot \frac{1}{ \bar{w}_B(\xi_F, \bar{E}_{max}) } \cdot \frac{1}{1 + \bar{E}_{max}} \cdot E_{max} \cdot d$ $C_G \approx 0,181 \cdot \frac{1}{ \bar{w}(\xi_F, \bar{E}_{max}) } \cdot \frac{1}{1 + \bar{E}_{max}} \cdot E_{max} \cdot d = 0,181 \cdot \frac{1}{1 + \bar{E}_{max}} \cdot 4 \cdot \bar{E}_{max}^{1/2} \cdot E_{max} \cdot d = 0,724 \cdot \frac{1}{1 + \bar{E}_{max}} \cdot \bar{E}_{max}^{1/2} \cdot E_{max} \cdot d$ <p>Info: Die in der vorangegangenen Fassung verwendete Näherungsgleichung entspricht der o.g. Gleichung: The approximate equation used in the previous version corresponds to the above-mentioned equation:</p> $C_G \approx d \cdot MAX(E_B, E_M) \cdot \left[0,362 - 0,24749 \cdot \left(\frac{E_M - E_B}{E_M + E_B}\right)^2 + 0,43734 \cdot \left(\frac{E_M - E_B}{E_M + E_B}\right)^4 \right]$
2	<p>Fazit conclusion</p>	<ol style="list-style-type: none"> Um die Auswertung von Ergebnissen übersichtlich zu halten, wurde mit unterschiedlichen E-Modulen bzw. G-Modulen aber mit einer konstanten, mittleren Poisson-Zahl $\nu = 0,3$ gerechnet. Die Ergebnisse werden von dieser Annahme nur geringfügig beeinflusst. Es zeigt sich, dass das in der eigenen Berechnung erreichte Ergebnis $C_G \left[\frac{N}{mm}\right] = 0,362 \cdot E \cdot d$ für $\bar{E} = 1$ circa dem Wert des in [2] angegebenen Wert $C_G \left[\frac{N}{mm}\right] = 0,34 \cdot E \cdot d$ entspricht. Der Kraftangriffspunkt ξ_F ist abhängig vom \bar{E}-Modulverhältnis. Für die Kehrwerte der \bar{E}-Modulverhältnisse ergeben sich logischerweise und aufgrund der Annahmen gleiche Steifigkeiten: $C_G(\bar{E}) = C_G(1/\bar{E})$ z.B.: $C_G\left(\bar{E} = \frac{2}{3}\right) = C_G\left(\bar{E} = \frac{3}{2}\right)$ Die Verschiebung (Verformung) der Gewindeflanken für ξ_F ist halb (1/2) so groß wie an den Gewindespitzen und gleich für beide Gewindeflanken: $w_B(\xi_F) = w_M(\xi_F)$ Eine Abschätzung/ Einschätzung der Steifigkeit kann durch die Verwendung der Extrapolation der dimensionslosen Deformation auch für größere E-Modul-Relationen erreicht werden. Für $0,5 < \bar{E} < 2,0$ ist eine Näherung mit $C_G \approx 0,72 \cdot \frac{E_M \cdot E_B}{E_M + E_B} \cdot d$ ausreichend.



3	Conclusion	<ol style="list-style-type: none"> To make the evaluation more comprehensible, it was calculated with different E-moduli but with a constant average value of $\nu = 0,3$. The results are only slightly affected by this assumption. It can be shown that the result of the own calculation $C_G \left[\frac{N}{mm} \right] = 0,362 \cdot E \cdot d$ for $\bar{E} = 1$ has approximately the same value which is listed in [2] with $C_G \left[\frac{N}{mm} \right] = 0,34 \cdot E \cdot d$. The force application point ξ_F depends on the relation of E-moduli. We find for the reciprocals of the E-Moduli the same values of stiffness $C_G(\bar{E}) = C_G(1/\bar{E})$ e.g.: $C_G(2/3) = C_G(3/2)$ The displacement (deformation) of the thread flanks in the point ξ_F is the half (1/2) of the displacement at the tips of thread. The assessment / evaluation of stiffness can be made for larger E-modulus ratios by use of the dimensionless deformation. For $0,5 < \bar{E} < 2,0$ an approximation with $C_G \approx 0,72 \cdot \frac{E_M \cdot E_B}{E_M + E_B} \cdot d$ is sufficient.
---	-------------------	--

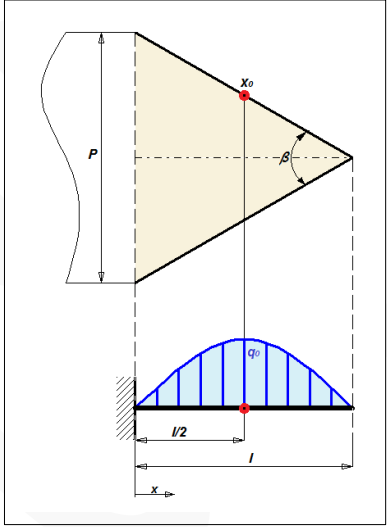
N	Anwendung/ Beispiel / Exemple									
1	Verwendung der Gewindesteifigkeit C_G bei der Auslegung einer Schraubenverbindung Using the stiffness of thread C_G in the interpretation of a screw connection Siehe / see: Excel-sheet www.ibladdt.de → screw_web_01.xlsx									
2	$D = 16,0 \text{ mm}$	$d = 10,0 \text{ mm}$	$d_2 = 9,350 \text{ mm}$	$d_3 = 8,124 \text{ mm}$	$P = 1,00 \text{ mm}$	$l = 10,0 \text{ mm}$	$E_B = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$	$E_M = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$	$C_G = 7,60 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$	
3	Vergleich Comparison	Druckmutter / pressure nut Kraftübertragung von der Schraube zur Mutter force transfer from the screw to the nut				Zugmutter / tensile nut Kraftübertragung von der Schraube zur Mutter force transfer from the screw to the nut				

Anhang 1 / Appendix



Anhang 1 / Appendix



0	Vereinfachtes Modell zur Berechnung der Gewindesteifigkeit / Simplified model for calculation of the stiffness of a thread	
1	Problem und Zielstellung / problem and goal ○ Kontrolle der vorher stehenden Berechnung mit einer einfachen Berechnung, ob die vorangegangene Berechnung plausibel ist und glaubwürdige Ergebnisse liefert und umgekehrt. ○ Nachweis, dass auch einfache Berechnungen zu brauchbaren Ergebnissen führen. Aber dazu man muss erst wissen, was brauchbar ist. ○ Check of the a. m. calculation with a simplified calculation, whether the a. m. calculation is plausible and leads to credible results and vice versa. ○ Verification that a simple calculation leads to a useful result, too. But you should know what is useful.	
2	Annahmen / assumptions ○ Balken mit linear veränderlichem Höhenverlauf über die Länge l und die Breite B , die dem halben Gewindeumfang entspricht. ○ Parabelförmige Belastungsverteilung über die Balkenlänge l . ○ Beam with linearly variable height along the length l and the width, which corresponds to the half of circumference. ○ Parabolic load distribution along the length of beam.	
3	Belastungsverteilung / load distribution $q(x) = q_0 \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$ $q(x=0) = q_0 \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) = 0 \rightarrow c = 0$ $q(x=l/2) = q_0 \cdot (a \cdot \frac{l^2}{4} + b \cdot \frac{l}{2}) = q_0$ $q(x=l) = q_0 \cdot (a \cdot l^2 + b \cdot l) = 0$ $q_0 \cdot (a \cdot \frac{l^2}{4} + b \cdot \frac{l}{4}) = 0$ $q_0 \cdot (b \cdot \frac{l}{2} - b \cdot \frac{l}{4}) = q_0 \rightarrow b = \frac{4}{l}$ $q_0 \cdot (a \cdot l^2 + 4) = 0 \rightarrow a = -\frac{4}{l^2}$ $q(x) = 4 \cdot q_0 \cdot (\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}) = 4 \cdot q_0 \cdot (\xi - \xi^2) \rightarrow \xi = \frac{x}{l}, dx = l \cdot d\xi$ $F = \int_0^l q(x) dx = 4 \cdot q_0 \cdot \int_0^1 (\xi - \xi^2) d\xi = 4 \cdot q_0 \cdot l \cdot \int_0^1 (\xi - \xi^2) d\xi$ $F = 4 \cdot q_0 \cdot l \cdot (\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})_0^1 = \frac{2}{3} \cdot q_0 \cdot l \rightarrow q_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{l}$ $q(\xi) = 6 \cdot \frac{F}{l} \cdot (\xi - \xi^2) = -Q'(\xi)$	 Dimensionslos / dimensionless $q^*(\xi) = \frac{q(\xi) \cdot l}{6 \cdot F} = (\xi - \xi^2) = -Q^*(\xi)$
5	$Q(\xi) = -6 \cdot F \cdot \int (\xi^2 - \xi) d\xi$ $Q(\xi) = -6 \cdot F \cdot (\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} + C_Q)$ $Q(\xi=1) = -6 \cdot F \cdot (\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} + C_Q) = 0 \rightarrow C_Q = +\frac{1}{6}$ $Q(\xi) = -F \cdot (2 \cdot \xi^3 - 3 \cdot \xi^2 + 1)$	Dimensionslos / dimensionless $M^*(\xi) = \frac{M(\xi)}{F \cdot l} = \int (2 \cdot \xi^3 - 3 \cdot \xi^2 + 1) d\xi$
6	$M(\xi) = -F \cdot l \cdot \int (2 \cdot \xi^3 - 3 \cdot \xi^2 + 1) d\xi$ $M(\xi) = -F \cdot l \cdot (\xi - \xi^3 + \frac{1}{2} \cdot \xi^4 + C_M)$ $M(\xi=1) = -F \cdot l \cdot (\xi - \xi^3 + \frac{1}{2} \cdot \xi^4 + C_M) = 0 \rightarrow C_M = -\frac{1}{2}$ $M(\xi) = -F \cdot l \cdot (\xi - \xi^3 + \frac{1}{2} \cdot \xi^4 - \frac{1}{2})$	Dimensionslos / dimensionless
7	Deformation durch Biegung / Biegespannung σ / deformation due to bending stress	
8	$w''(\xi) = -\frac{M(\xi)}{E \cdot I(\xi)} = \frac{12 \cdot F \cdot l}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot \frac{(\xi - \xi^3 + \frac{1}{2} \xi^4 - \frac{1}{2})}{(1-\xi)^3} = -\frac{12 \cdot F \cdot l}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot \frac{1+\xi}{2} = -\frac{6 \cdot F}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot (1+\xi)$	$\frac{(1+\xi) \cdot (1-\xi)^3}{2 \cdot (1-\xi)^3} = \frac{1-3\xi+3\xi^2-\xi^3+\xi-3\xi^2+3\xi^3-\xi^4}{2 \cdot (1-\xi)^3} = -\frac{(\xi-\xi^3+\frac{1}{2}\xi^4-\frac{1}{2})}{(1-\xi)^3}$
9	$w'_\sigma(\xi) = -\frac{6 \cdot F \cdot l^2}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot \int (1+\xi) d\xi = -\frac{6 \cdot F}{E \cdot P^3} \cdot (\xi + \frac{1}{2} \cdot \xi^2 + C_{w'\sigma})$ $w'_\sigma(\xi=0) = -\frac{6 \cdot F \cdot l^2}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot (\xi + \frac{1}{2} \cdot \xi^2 + C_{w'\sigma}) = 0 \rightarrow C_{w'\sigma} = 0$ $w'_\sigma(\xi) = -\frac{3 \cdot F \cdot l^2}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot (2 \cdot \xi + \xi^2)$	
10	$w_\sigma(\xi) = -\frac{3 \cdot F \cdot l^3}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot \int (2 \cdot \xi + \xi^2) d\xi = \frac{3 \cdot F}{E \cdot P^3} \cdot (\xi^2 + \frac{1}{3} \cdot \xi^3 + C_{w_\sigma})$ $w_\sigma(\xi=0) = -\frac{3 \cdot F \cdot l^3}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot (\xi^2 + \frac{1}{3} \cdot \xi^3 + C_{w_\sigma}) = 0 \rightarrow C_{w_\sigma} = 0$ $w_\sigma(\xi) = -\frac{F \cdot l^3}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot (3 \cdot \xi^2 + \xi^3)$ $w_\sigma(\xi = \frac{1}{2}) = -\frac{F \cdot l^3}{E \cdot B \cdot P^3} \cdot (\frac{3}{4} + \frac{1}{8}) = -\frac{7}{8} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot B \cdot P^3}$ $w_\sigma(\xi = \frac{1}{2}) = -\frac{7}{8} \cdot \frac{\cos^3 30^\circ}{\pi} \cdot \frac{F}{E \cdot d_2/2} = -0,1813 \cdot \frac{F}{E \cdot d_2/2} = -0,2014 \cdot \frac{F}{E \cdot d}$	$\frac{l}{P} = \frac{1}{2 \cdot \tan \frac{\beta}{2}}$, für metrisches Gewinde: $\frac{l}{P} = \cos 30^\circ$ $B = \pi \cdot d_2/2, \frac{l}{P} = \frac{1}{2 \cdot \tan \frac{\beta}{2}} = \cos 30^\circ, g = 1/2,6, k = 5/6, d_2 = 0,9 \cdot d$ Dimensionslos / dimensionless $w_\sigma^*(\xi) = \frac{E \cdot d}{F} \cdot w_\sigma(\xi) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{l^3}{P^3} \cdot (3 \cdot \xi^2 + \xi^3)$
11	Deformation durch Schubspannung τ / deformation due to the shear stress	



12 $w'_\tau(\xi) = \frac{Q(\xi)}{G \cdot A_S(\xi)} = \frac{Q(\xi)}{g \cdot E \cdot k \cdot A(\xi)} = \frac{F}{g \cdot k \cdot E \cdot B \cdot P} \cdot \frac{(2 \cdot \xi^3 - 3 \cdot \xi^2 + 1)}{(1 - \xi)}$
 $w_\tau(\xi) = \frac{F \cdot l}{g \cdot E \cdot B \cdot k \cdot P} \cdot \int \frac{(2 \cdot \xi^3 - 3 \cdot \xi^2 + 1)}{(1 - \xi)} d\xi = \frac{F \cdot l}{g \cdot E \cdot B \cdot k \cdot P} \cdot \int (2 \cdot \xi^2 - \xi - 1) d\xi$
 $w_\tau(\xi) = \frac{F \cdot l}{g \cdot E \cdot B \cdot k \cdot P} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \xi^3 - \frac{1}{2} \cdot \xi^2 - \xi + C_{w\tau} \right)$
 $w_\tau(\xi = 0) = \frac{F \cdot l}{g \cdot E \cdot B \cdot k \cdot P} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \xi^3 - \frac{1}{2} \cdot \xi^2 - \xi + C_{w\tau} \right) = 0 \rightarrow C_{w\tau} = 0$
 $w_\tau(\xi) = \frac{F \cdot l}{g \cdot E \cdot B \cdot k \cdot P} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \xi^3 - \frac{1}{2} \cdot \xi^2 - \xi \right)$
 $w_\tau \left(\xi = \frac{1}{2} \right) = \frac{F \cdot l}{g \cdot E \cdot B \cdot k \cdot P} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{13}{24} \cdot \frac{F \cdot l}{g \cdot E \cdot B \cdot k \cdot P}$
 $w_\tau \left(\xi = \frac{1}{2} \right) = -0,4662 \cdot \frac{F}{E \cdot d_2 / 2} \approx -0,5180 \cdot \frac{F}{E \cdot d_2 / 2}$

Dimensionslos / dimensionless
 $w_\tau^*(\xi) = \frac{E \cdot d}{F} \cdot w_\tau(\xi) = \frac{1}{\pi \cdot g \cdot k} \cdot \frac{l}{P} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \xi^3 - \frac{1}{2} \cdot \xi^2 - \xi \right)$
 $B = \pi \cdot \frac{d_2}{2}, \frac{l}{P} = \frac{1}{2 \cdot \tan \frac{\beta}{2}} = \cos 30^\circ$
 $g = 1/2, 6, k = 5/6, d_2 = 0,9 \cdot d$

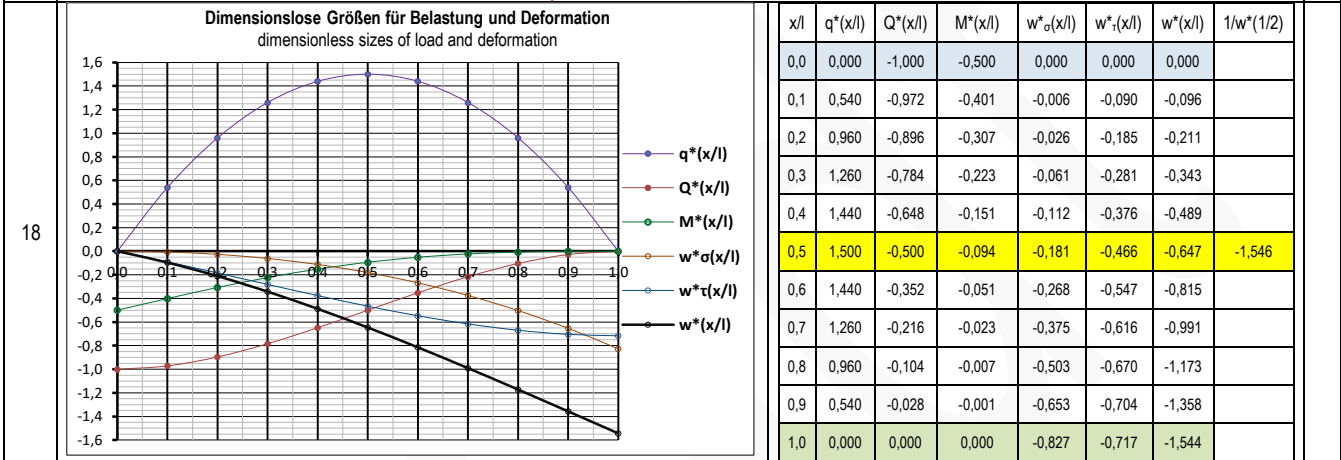
13 $|w(\xi = \frac{1}{2})| = |w_\sigma(\xi = \frac{1}{2}) + w_\tau(\xi = \frac{1}{2})| = 1,295 \cdot \frac{F}{E \cdot d_2}$

14 **Steifigkeit / stiffness** $C = \frac{F}{w}, \frac{1}{C_G} = \frac{1}{C_{GB}} + \frac{1}{C_{GB}}$

15 Für einen Gewindegang (1) $C_{GB/GM} = \frac{1}{1,295} \cdot \frac{E_B \cdot M}{d_2} \cdot d_2 = 0,772 \cdot \frac{E_B \cdot M}{d_2}$ for one thread turn (1)

16 Für eine Gewindepaarung (2) $C_G = \frac{1}{1,295} \cdot \frac{E_M \cdot E_B}{E_M + E_B} \cdot d_2 = 0,772 \cdot \frac{E_M \cdot E_B}{E_M + E_B} \cdot d_2$ for two matched thread turns (2)

17 Für $E = E_M = E_G, d_2 = 0,9 \cdot d$ $C_G = \frac{1}{1,295} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot d = 0,347 \cdot E \cdot d$



19 $q^*\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{q(\frac{x}{l})}{6 \cdot F \cdot l}, Q^*\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{Q(\frac{x}{l})}{F}, M^*\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{M(\frac{x}{l})}{F \cdot l}$

20 **Ergebnis / result**

- Die Näherung der Belastung mit einer quadratischen Verteilung führt im Mittel zu einer vergleichbaren Größe der Steifigkeit, wie sie in der vorangegangenen Berechnung ermittelt wurde. **Damit wird das vorher erreichte Ergebnis bestätigt.**
- Unter der Voraussetzung, dass E_B und E_M sich nicht stark unterscheiden, kann bei dieser Betrachtungsweise mit einer mittleren Gewindesteifigkeit $C_G \approx 0,695 \cdot \frac{E_M \cdot E_B}{E_M + E_B} \cdot d$ gerechnet werden.
 Für $E_B = E_M = E$ ergibt sich dann: $C_G \approx 0,347 \cdot E \cdot d$
- Eine gemeinsame Kontaktfläche kann sich bei dieser Berechnung nicht ergeben, da sie nicht als Randbedingung in diese Berechnung eingeht. Die Krümmungen sind gegensätzlich, aber nur schwach ausgeprägt. **Das Ergebnis bleibt deshalb akzeptabel.**
- Die in [2] angeführte Steifigkeit $C_G \approx 0,34 \cdot E \cdot d$ wird mit dem hier erreichten Ergebnis bestätigt.
- Approximation of the load with a parabolic distribution leads in the mean to comparable stiffness like the result of the a. m. calculation.
- Under condition that the E-moduli differ only slightly, the thread stiffness can to be calculated by $C_G = 0,695 \cdot \frac{E_M \cdot E_B}{E_M + E_B} \cdot d$.
 For $E_B = E_M = E$ then results $C_G = 0,347 \cdot E \cdot d$
- There is no conjunct contact area, because the boundary conditions are not part of the calculation. The bendings are opposite, but they are weak. Therefore the result is acceptable.
- The result in [2] $C_G = 0,34 \cdot E \cdot d$ can be approximately confirmed here.

21 **Warum kompliziert, wenn es auch einfach geht?**
 Why complicate things when it comes easier?

22 **benutzte Transformationen / used transformations**

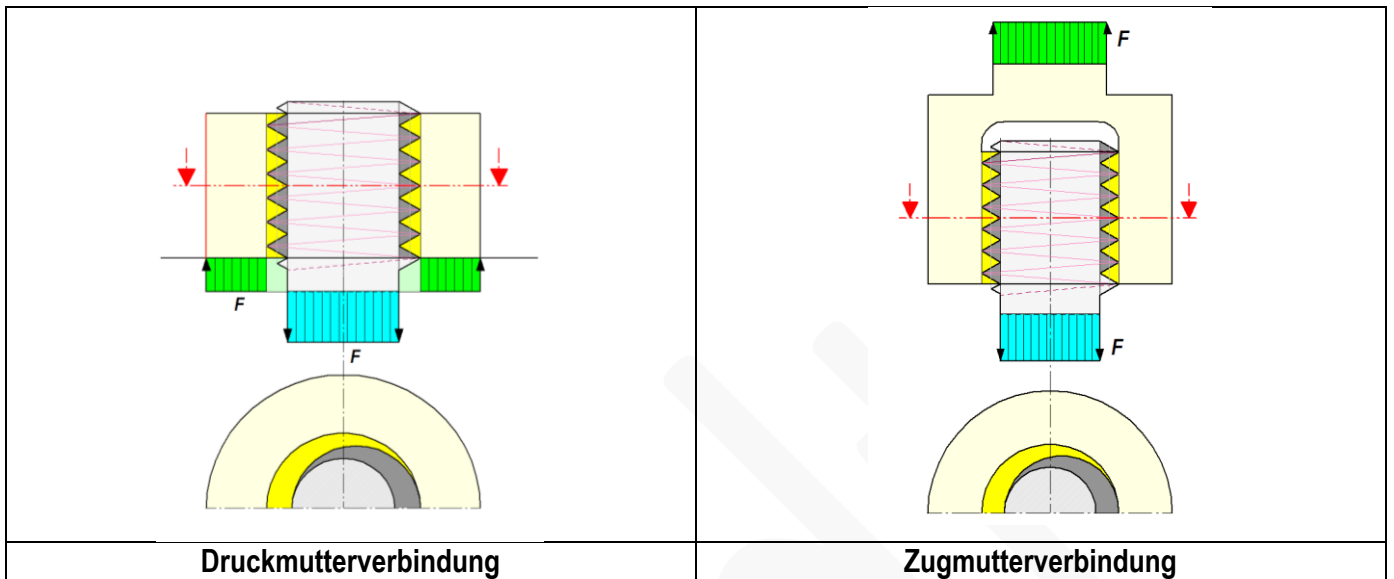
23 $z = 1 - \xi, \frac{dz}{d\xi} = -1, \xi = 1 - z, dz = -d\xi$

24 $\frac{\left(\frac{1}{2} - \xi + \xi^3 - \frac{\xi^4}{2}\right)}{(1 - \xi)^3} = \frac{+\frac{1}{2} \cdot (1 - z) + (1 - z)^3 - \frac{1}{2} \cdot (1 - z)^4}{z^3} = \frac{+\frac{1}{2} - 1 + z + 1 - 3 \cdot z + 3 \cdot z^2 - z^3 - \frac{1}{2} + 2 \cdot z - 3 \cdot z^2 + 2 \cdot z^3 - \frac{1}{2} z^4}{z^3}$

25 $= \frac{+\frac{1}{2} - \frac{1}{2} z^4}{z^3} = \left(1 - \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (2 - z) = \frac{1}{2} \cdot (2 - (1 - \xi)) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi)$



27	$\frac{(3\xi^2 - 2\xi^3 - 1)}{(1-\xi)} = \frac{3(1-z) - 2(1-z)^2 - 1}{z} = \frac{3 - 6z + 3z^2 - 2 + 4z - 2z^2 - 1}{z} = \frac{-3z^2 + 2z^3}{z} = -3z + 2z^2$
28	$= -3z + 2z^2 = -3 + 3\xi + 2\xi^2 - 4\xi + 2 = 2\xi^2 - \xi - 1$



Druckmutterverbindung

Zugmutterverbindung

