

Schmidt-Theorie für Alpha-Stirlingmotoren

The Schmidt –Theory for the Alpha-Stirling Engines

Klaus-Jürgen Bladt
Rostock, 2013-12-02

2.Ausgabe / 2nd redaction

Die Dokumentation wurde mit bestem Wissen und Gewissen erarbeitet. Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle erhebt die Dokumentation keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Unbeabsichtigte Fehler können auftreten. Hinweise auf inhaltliche Verbesserungen sind erwünscht.

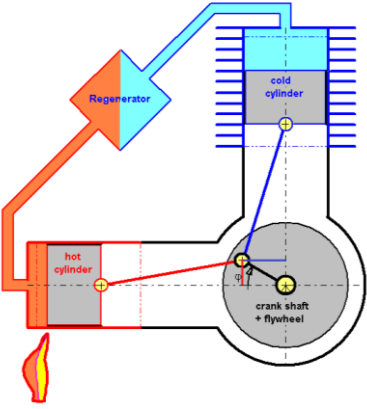
Für die Vervielfältigung des Dokumentes und die Übernahme von Auszügen ist die Zustimmung des Autors erforderlich.

Für den Inhalt verlinkter Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

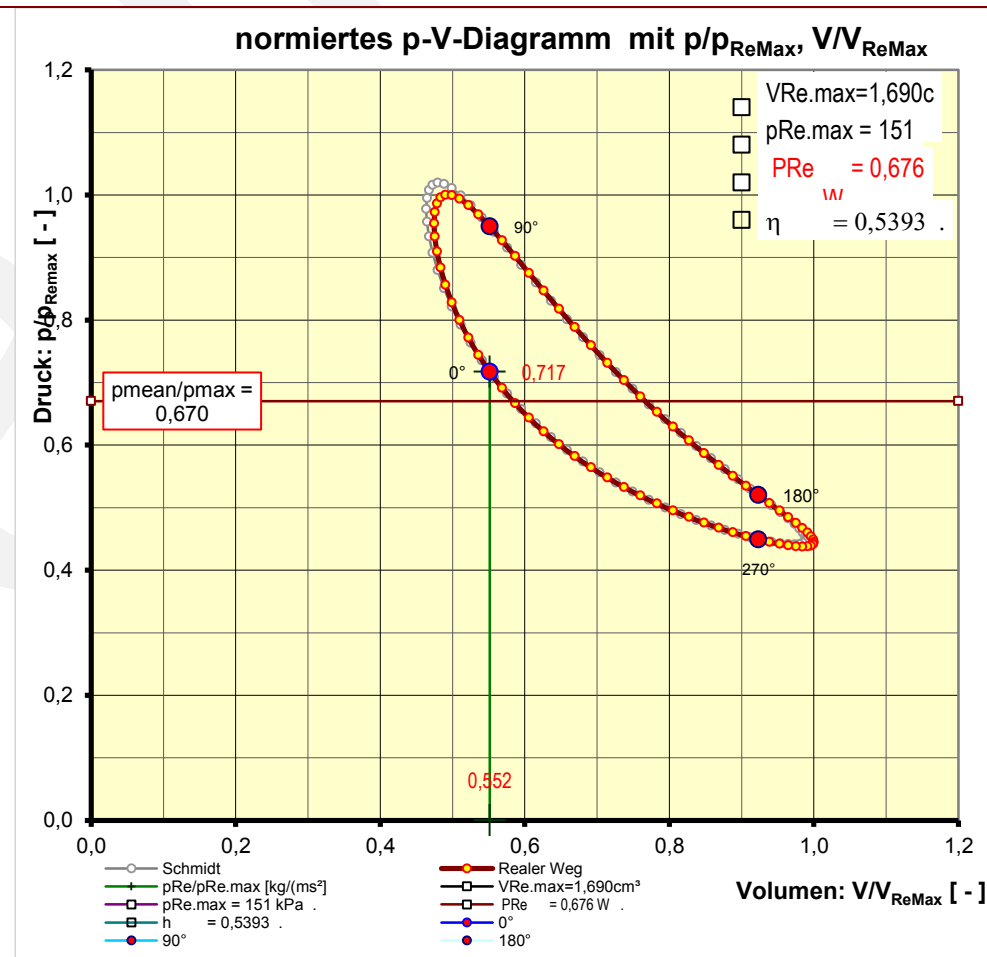
The paper was prepared to best of one's knowledge. The paper makes no claim to be complete and correct in spite of the careful control. References for improvements with regard to the content are welcome.

The duplication of the document and the taking over abridges require the approval of the author.

The linked WEB-Site operators are responsible for contents of their own sites.

1	<p>Warum das Ganze? What's all that in aid of?</p>	<p>Wer sich mit dem Modellbau von Heißluftmotoren beschäftigt, sollte sich auch mit den dazugehörigen thermodynamische Grundlagen befassen, weil</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ es einfach dazugehört und vieles erklärt, ○ es Freude es macht, elegante Lösungen nachzuvollziehen, ○ die Lösungsansätze anregen, auch bei anderen, scheinbar nicht lösbaren Problemen, nach Lösungen zu suchen, ○ sich hier für den in der Materie Ungeübten ein sehr gutes physikalisches und mathematisches Trainingsobjekt anbietet, ○ die Einschätzung erreichter praktischer Ergebnisse möglich wird bzw. Wege zu einer Optimierung geöffnet werden, auch wenn die Theorie auf einigen Annahmen aufbaut und das Ergebnis stark qualitativen Charakter hat. 	<p>If somebody is engaged in the model making of hot air engines, who should have a look at the thermodynamic foundations, because:</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ it belongs simply to the matter and declares many, ○ It gives pleasure to follow an impressive solution, ○ the method of resolution animates to look for solutions for other seeming non-solvable problems, ○ it is a good exercise for an in this matter inexpertly person both related to mathematics and physics, ○ the possibility to evaluate the achieved practical results is given respectively ways for an improvement are opened, even though the theory builds on assumptions and the result has a strong qualitative character.
2	<p>Prinzip Principle</p> 	<p>$0^\circ \rightarrow 90^\circ$: Anfänglich wird die Luft vom kalten Zylinder (Kompressionsseite) durch den Regenerator (der seine gespeicherte Wärme an die Luft abgibt) in den heißen Zylinder (Expansionsseite) gedrückt mit der im Schwungrad gespeicherten Energie. Im heißen Zylinder wird die Luft weiter erhitzt. Der Druck im System steigt. Bei größer werdendem Kurbelwinkel ($>45^\circ$) entsteht dann durch den Hebelversatz von 90° eine Kraft an der Kurbel und ein Moment an der Kurbelwelle, welche zu einer Speicherung von Energie im Schwungrad führen.</p> <p>$90^\circ \rightarrow 180^\circ$: Durch die sich erhaltende und weiter ausdehnende Luft auf der Expansionsseite wird auf Grund der Hebelkonstellation von beiden Hebeln jeweils eine Kraft bzw. ein Moment erzeugt, dass zur Erzeugung und Speicherung mechanischer Energie im Schwungrad führt.</p> <p>$180^\circ \rightarrow < 270^\circ$: die Luft wird vom heißen Zylinder durch den Regenerator (der Wärme speichert) in den kalten Zylinder gedrückt. Im Regenerator wird Wärme gespeichert. Im kalten Zylinder wird die Luft weiter abgekühlt. Aufgrund der Stellung der beiden Kolben und Pleuel wird anfänglich ($<225^\circ$) noch ein Moment an der Kurbelwelle erzeugt. Bei fortgeschrittenem Winkel wird der Kurbeltrieb durch die im Schwungrad gespeicherte Energie angetrieben.</p> <p>$270^\circ \rightarrow 360^\circ$: Auf der Expansionsseite (heiß) wird Wärme zugeführt. Die Luft wird von der Expansionsseite auf die Kompressionsseite (kalt) gedrückt. Dabei wird im Regenerator Wärme gespeichert. Auf der Kompressionsseite wird dann die Luft gekühlt. In dieser Phase wird die im Schwungrad gespeicherte Energie benötigt zur Aufrechterhaltung der Drehbewegung.</p>	<p>$0^\circ \rightarrow 90^\circ$: At the beginning of the process the air is pressed with the energy of the flywheel from the cold cylinder (compressions side) through the regenerator to the hot cylinder (expansions side). The air will be heated in the regenerator and more heated in the hot cylinder. The pressure increases in the system. With increasing crank angle ($>45^\circ$) a force and whose moment act on the crank shaft due to the offset of 90° between both cranks. Now the energy will be accumulated in the flywheel.</p> <p>$90^\circ \rightarrow 180^\circ$: The air is more and more heated and expanded. Due to the constellation of both cranks the forces of both cranks and whose moments act on the crank shaft. Mechanical energy is accumulated in the flywheel.</p> <p>$180^\circ \rightarrow 270^\circ$: The air is pressed from the hot cylinder through the regenerator to the cold cylinder. A part of the heat is accumulated in the regenerator. The air will be more cooled down in the cold cylinder. For an angle $\sim < 225^\circ$ a force and a moment act on the crank shaft and energy is accumulated in the flywheel. After that the energy of flywheel is used to drive the crank system.</p> <p>$270^\circ \rightarrow 360^\circ$: Heat is brought in to the expansion side (hot). The air is pressed through the regenerator to the compression side (cold). The generator accumulates a part of the heat. After that the air will be more cooled in the compression cylinder. In this phase a part of the energy of flywheel is used for the maintenance of the rotary motion.</p>
3	<p>Annahmen für die Berechnung des Motors Assumptions for the calculation of the engine</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Das Gas im System (Motor) verhält sich wie ein ideales Gas. 2. In der Maschine herrscht an jedem Ort zur gleichen Zeit stets der gleiche Druck. 3. Im Motor ist die Temperatur örtlich und zeitlich konstant (heiß bzw. kalt) 4. Die im System eingeschlossene Masse des Gases bleibt konstant. 5. Der Regenerator arbeitet ohne Verluste. 6. Zwischen Generatoreingang und Generatorausgang ändert sich die Temperatur nach einer vorgegeben Gesetzmäßigkeit. 7. Die zugeführte Wärme wird vom Gas vollständig aufgenommen. Bei der Wärmeübertragung treten keine Verluste auf. 8. Die Volumina der heißen Seite (H) und der kalten Seite (C) ändern sich in vereinfachter Form sinusförmig entsprechend der Kinematik 9. Die mechanische Reibung im Motor wird vernachlässigt. 10. Es handelt sich um eine vereinfachte und quasistationäre Betrachtung. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. The gas in the system (engine) behaves like an ideal gas. 2. The same pressure is anywhere in the system (engine) at a particular time. 3. The temperature is local and temporal constant (hot, cold). 4. The mass in the system is constant. 5. The generator works without losses. 6. The temperature changes between generator input and output in accordance in accordance with a given law. 7. The imparted energy is transmitted completely to the gas. There is not heat transfer lost. 8. The volume of hot side and the cold side change in a simplified sinus-form in accordance with the kinematics. 9. The friction is neglected. 10. It is a simplified and quasi-static treatment of the problem.

4		
5	Indices	Expansionsraum / Heiß / Hot: ...H... , Kompressionsraum / Kalt / Cold: ...C... , Regenerator: ...R... , Totraum / Dead storage: ...D
6		Maximum ...max , Minimum: ...min , Mittelwert / Mean Value: ...mean , atmosphärisch, atmospheric: ...atm , Zufuhr/ Input ...in , Abfuhr, Output ...out
7	Geometrie / geometry	
8	Kolbendurchmesser der heißen Seite Piston diameter of the hot side	$d_H [m]$
9	Kolbendurchmesser der kalten Seite Piston diameter of cold side	$d_C [m]$
10	Kurbelradius der heißen Seite Crank shaft radius of the hot side	$r_H [m]$
11	Kurbelradius der kalten Seite Crank shaft radius of the cold side	$r_C [m]$
12	Pleuelstangenlänge der heißen Seite Length of con-rod of the hot side	$l_H [m]$
13	Pleuelstangenlänge der kalten Seite Length of the con-rod of the cold side	$l_C [m]$
14	Pleuelstangenverhältnis der heißen Seite Con-rod relation of the hot side	$\lambda_H [m]$
15	Pleuelstangenverhältnis der kalten Seite Con-rod relation of the cold side	$\lambda_C [m]$
16	Kurbelwinkel der heißen Seite Crank shaft angle of the hot side	$\varphi = \varphi(t) = \omega \cdot t = \frac{\pi \cdot n}{30} \cdot t [rad]$
17	Winkelgeschwindigkeit: Angular velocity	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{60} [s^{-1}] = const$
18	Versatz der Kurbelwinkel heiß - kalt Displacement of crank shaft angles hot – cold	$\alpha [rad]$



19	Thermodynamische Größen Thermodynamic values	
20	Masse im System Mass in the system	$m [kg] = \sum_1^n m_i$ Systemkonstante
21	Spezielle Gaskonstante specific gas constant	$R_s [\frac{m^2}{s^2 \cdot ^\circ K}]$ { z.B. für Luft 287 }
22	Wärmekapazität des Gases (Luft) Heat capacity of the gas (air)	$C_p [\frac{s^2}{m^2 \cdot ^\circ K}]$ (für Luft: $C_p \approx 1018 \frac{s^2}{m^2 \cdot ^\circ K}$)
23	Druck im System Pressure in the system	$p(\varphi(t)) [\frac{kg}{m \cdot s^2}]$
24	Atmosphärische Druck Atmospheric pressure	$p_{atm} [\frac{kg}{m \cdot s^2}] = 1,013 \cdot 10^5$
25	Temperatur der heißen Seite Temperature of the hot side	$T_H [^\circ K]$
26	Temperatur des Regenerators Temperature of the generator	$T_R [^\circ K] = \frac{(T_H - T_C)}{\ln \frac{T_H}{T_C}}$
27	Temperatur der kalten Seite Temperature of the cold side	$T_C [^\circ K]$
28	Kinematik und Volumina	
29	Weg des Kolbens der heißen Seite Piston stroke of the hot side	$S_H = r_H \cdot [(1 - \cos(\varphi)) + \frac{1}{\lambda_H} \cdot (1 - \sqrt{1 - \lambda_H^2 \cdot \sin^2(\varphi)})]$ $\lambda_H^2 \ll 1 \quad S_H \approx r_H \cdot [1 - \cos(\varphi)]$
30	Weg des Kolbens der kalten Seite: Piston stroke of the cold side	$S_C = r_c \cdot [(1 - \cos(\varphi - \alpha)) + \frac{1}{\lambda_c} \cdot (1 - \sqrt{1 - \lambda_c^2 \cdot \sin^2(\varphi - \alpha)})]$ $\lambda_c^2 \ll 1: \quad S_C \approx r_c \cdot (1 - [\cos(\varphi - \alpha)]) = r_c \cdot \{1 - [\cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha)]\}$

31	Maximum des variablen Volumens der heißen Seite Maximum value of the variable volume of the hot side	$V_{H \max} [m^3] = 2 \cdot r_H \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_H^2 = 2 \cdot V_{Hmean}$
32	Maximum des variablen Volumens der kalten Seite Maximum value of the variable volume of the cold side	$V_{C \max} [m^3] = 2 \cdot r_C \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_C^2 = 2 \cdot V_{Cmean}$
33	Mittelwert des variablen Volumen der heißen Seite Mean value of the variable volume of the hot side	$V_{Hmean} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{V_{H \max}}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) \cdot d\varphi = \frac{V_{H \max} / 2}{2 \cdot \pi} \cdot [\varphi - \sin \varphi]_0^{2\pi} = \frac{V_{H \max}}{2} = r_H \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_H^2$
34	Mittelwert des variablen Volumen der kalten Seite Mean value of the variable volume of the cold side	$V_{Cmean} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{V_{C \max}}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\varphi - \alpha)) \cdot d\varphi = \frac{V_{C \max} / 2}{2 \cdot \pi} \cdot [\varphi - \sin \varphi]_0^{2\pi} = \frac{V_{C \max}}{2} = r_C \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_C^2$
35		
36	Totraum der heißen Seite Dead room capacity of the hot side	$V_{HD} [m^3]$
37	Volumen des Regenerator (Totraum) Volume of the regenerator (dead room capacity)	$V_R [m^3]$
38	Totraum der kalten Seite Dead room capacity of the cold side	$V_{CD} [m^3]$
39	Volumen der heißen Seite Volume of the hot side	$V_H = V_{Hmean} \cdot [1 - \cos(\varphi)] + V_{HD}$
40	Volumen der kalten Seite Volume of the cold side	$V_C = V_{Cmean} \cdot [1 - \cos(\varphi - \alpha)] + V_{CD} = V_{Cmean} \cdot [1 - \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha)] + V_{CD}$
41	Gesamtes Gasvolumen im Motor Complete volume of gas in the engine	$V(\varphi) = V_H(\varphi) + V_{HD} + V_R + V_{CD} + V_C(\varphi) = V_{variabel} + V_{const}$
42	Massenbilanz und Systemdruck	
43	Thermodynamische Zustandsgleichung Ideal gas law	$m = \sum_1^n m_i = \sum_1^n \frac{p \cdot V_i}{R_S \cdot T_i} = const$
44		$m = \frac{p \cdot V_H}{R_S \cdot T_H} + \frac{p \cdot V_{HD}}{R_S \cdot T_H} + \frac{p \cdot V_R}{R_S \cdot T_R} + \frac{p \cdot V_{CD}}{R_S \cdot T_C} + \frac{p \cdot V_C}{R_S \cdot T_C} = \frac{p}{R_S} \cdot \left[\left(\frac{V_H}{T_H} + \frac{V_{HD}}{T_H} \right) + \frac{V_R}{T_R} + \left(\frac{V_{CD}}{T_C} + \frac{V_C}{T_C} \right) \right]$

45		$m = \frac{p}{R_S} \cdot \left(\frac{V_{Hmean}}{T_H} \cdot [1 - \cos(\varphi)] + \frac{V_{HD}}{T_H} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_{Cmean}}{T_C} [1 - \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha)] + \frac{V_{CD}}{T_C} \right)$
46		$m = \frac{p}{R_S} \cdot \left[\left(\frac{V_{Hmean}}{T_H} + \frac{V_{HD}}{T_H} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_{Cmean}}{T_C} + \frac{V_{CD}}{T_C} \right) - \frac{V_{Hmean}}{T_H} \cos(\varphi) - \cos(\alpha) \cdot \frac{V_{Cmean}}{T_C} \cos(\varphi) - \frac{V_{Cmean}}{T_C} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \right]$
47		$m = \frac{p}{R_S} \cdot \left[\left(\frac{V_{Hmean}}{T_H} + \frac{V_{HD}}{T_H} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_{Cmean}}{T_C} \right) + \frac{V_{CD}}{T_C} - \left(\frac{V_{Hmean}}{T_H} + \cos(\alpha) \cdot \frac{V_{Cmax}}{T_C} \right) \cdot \cos(\varphi) - \frac{V_{Cmax}}{T_C} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \right]$
48		$p = m \cdot R_S \cdot \left[\left(\frac{V_{Hmean}}{T_H} + \frac{V_{HT}}{T_H} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_{Cmean}}{T_C} + \frac{V_{CD}}{T_C} \right) - \left(\frac{V_{Hmean}}{T_H} + \cos(\alpha) \cdot \frac{V_{Cmean}}{T_C} \right) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\alpha) \cdot \frac{V_{Cmean}}{T_C} \cdot \sin(\varphi) \right]^{-1}$
49	Substitution	$a = \left(\frac{V_{Hmean}}{T_H} + \frac{V_{HD}}{T_H} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_{Cmean}}{T_C} + \frac{V_{CD}}{T_C} \right)$
50	Substitution	$c \cdot \cos(\beta) = - \left(\frac{V_{Hmean}}{T_H} + \cos(\alpha) \cdot \frac{V_{Cmean}}{T_C} \right)$
51	Substitution	$c \cdot \sin(\beta) = - \sin(\alpha) \cdot \frac{V_{mean}}{T_C}$
52		$c = \sqrt{\left(\frac{V_{Hmean}}{T_H} + \cos(\alpha) \cdot \frac{V_{Cmean}}{T_C} \right)^2 + \left(\sin(\alpha) \cdot \frac{V_{Cmean}}{T_C} \right)^2}$
53		$\beta = \arctan \left(\frac{\sin(\alpha) \cdot \frac{V_{Cmean}}{T_C}}{\frac{V_{Hmean}}{T_H} + \cos(\alpha) \cdot \frac{V_{Cmean}}{T_C}} \right)$
54		$p = m \cdot R_S \cdot [a - c \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\varphi) - c \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\varphi)]^{-1}$
55	Additionstheorem Addition theorem	$\sin(\varphi) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [(\cos(\varphi - \beta) - \cos(\varphi + \beta))]$

56	Additionstheorem Addition theorem	$\cos(\varphi) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [(\cos(\varphi - \beta) + \cos(\varphi + \beta))]$
57		$\sin(\beta) \cdot \sin(\varphi) + \cos(\beta) \cdot \cos(\varphi) = \cos(\varphi - \beta)$
58		$p = m \cdot R_s \cdot \{a - c \cdot \cos(\varphi - \beta)\}^{-1}$
59		$b = \frac{c}{a}$
60	Druck Pressure	$p = \frac{m \cdot R_s}{a} \cdot \frac{1}{\{1 - b \cdot \cos(\varphi - \beta)\}}$
61	Minimaler Druck Minimum pressure	$p_{\min} = \frac{m \cdot R_s}{a \cdot (1 + b)}; \quad \text{wenn } \cos(\varphi - \beta) = -1$
62	Maximaler Druck Maximum pressure	$p_{\max} = \frac{m \cdot R_s}{a \cdot (1 - b)}; \quad \text{wenn } \cos(\varphi - \beta) = +1$
63	Mittlerer Druck Mean pressure	$p_{\text{mean}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} p \cdot d\varphi = \frac{m \cdot R_s}{a} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{m \cdot R_s}{\{1 - b \cdot \cos(\varphi - \beta)\}} \cdot d\varphi = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{m \cdot R_s}{a} \cdot \frac{2}{\sqrt[2]{1 - b^2}} \cdot \arctan\left(\frac{(1 + b) \cdot \tan\left(\frac{\varphi - \beta}{2}\right)}{\sqrt[2]{1 - b^2}}\right) \Bigg _0^{2\pi} = \frac{m \cdot R_s}{a \cdot \sqrt[2]{1 - b^2}}$
64	Additionstheorem Addition Theorem	$\arctan(x_1) - \arctan(x_2) = \pi + \arctan\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 \cdot x_2}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{1 + b}{\sqrt[2]{1 - b^2}} \frac{[\tan\left(\frac{2 \cdot \pi - \beta}{2}\right) - \tan\left(\frac{-\beta}{2}\right)]}{\tan\left(\frac{2 \cdot \pi - \beta}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{-\beta}{2}\right)}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{1 + b}{\sqrt[2]{1 - b^2}} \frac{[\tan\left(\frac{2 \cdot \pi - \beta}{2}\right) - \tan\left(\frac{-\beta}{2}\right)]}{\tan\left(\frac{2 \cdot \pi - \beta}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{-\beta}{2}\right)}\right) = \pi$, da $\tan\left(\frac{2 \cdot \pi - \beta}{2}\right) = \tan\left(\frac{-\beta}{2}\right)$ info: $\arctan(0) = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$
65	Mittlerer Druck im System Mean pressure in the system	$p_{\text{mean}} = \frac{m \cdot R_s}{a \cdot \sqrt[2]{1 - b^2}}$
66	Winkel für maximalen / minimalen Druck Angle of the maximum / minimum pressure	Mit /with $\frac{dp}{d\varphi} = 0$: $\varphi(p_{\max}) = \beta$; $\varphi(p_{\min}) = \beta + \pi$
67	Masse im System Mass in the system	$p_{\text{mean}} \text{ gegeben : } m = \frac{a \cdot p_{\text{mean}} \cdot \sqrt[2]{1 - b^2}}{R_s}$
68		$p_{\text{mean}} \rightarrow p_{\text{atm}} : m = \frac{a \cdot p_{\text{atm}} \cdot \sqrt[2]{1 - b^2}}{R_s}$

69	Leistungsberechnung Calculation of the power	
70	Momentane Leistung Current power	$P = p \cdot \dot{V} = p \cdot \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot p \cdot \frac{d}{d\varphi} \{V_H + V_{HD} + V_R + V_C + V_{CD}\} = \omega \cdot \frac{p_{mean} \cdot \sqrt[2]{1-b^2}}{\{1-b \cdot \cos(\varphi-\beta)\}} \cdot \frac{d}{d\varphi} \{V_H + V_{HD} + V_R + V_C + V_{CD}\}$
71	Leistung der warmen Seite Power of the hot side	$P_H [\frac{kg \cdot m^2}{s^3}] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int p \cdot \frac{dV_H}{dt} \cdot d\varphi = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} p \cdot \frac{dV_H}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot d\varphi = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} p \cdot \frac{dV_H}{d\varphi} \cdot \omega \cdot d\varphi = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{m \cdot R_s}{a \cdot \{1-b \cdot \cos(\varphi-\beta)\}} \cdot dV_H$
72		$\frac{dV_H}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \{V_{Hmean} \cdot [1 - \cos(\varphi)] + V_{HD}\} = V_{Hmean} \cdot \sin(\varphi) = V_{Hmean} \cdot [\sin(\varphi - \beta) \cdot \cos(\beta) + \cos(\varphi + \beta) \cdot \sin(\beta)]$
73	Transformation	$\sin(\varphi) = \sin((\varphi - \beta) + \beta) = \sin(\varphi - \beta) \cdot \cos(\beta) + \cos(\varphi - \beta) \cdot \sin(\beta)$
74		$P_H = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{V_{Hmean} \cdot m \cdot R_s}{a} \cdot \left\{ \cos(\beta) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \beta)}{(1 - b \cdot \cos(\varphi - \beta))} \cdot d\varphi + \sin(\beta) \cdot \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(\varphi - \beta)}{(1 - b \cdot \cos(\varphi - \beta))} \cdot d\varphi \right] \right\}$
75		$P_H = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{V_{Hmean} \cdot m \cdot R_s}{a} \cdot \left\{ \cos(\beta) \cdot \frac{1}{b} \cdot [\ln(1 - b \cdot \cos(\varphi - \beta))] + \sin(\beta) \cdot \left[-\frac{(\varphi - \beta)}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{2}{\sqrt[2]{1-b^2}} \cdot \arctan \frac{(1+b) \cdot \tan(\frac{\varphi - \beta}{2})}{\sqrt[2]{1-b^2}} \right] \right\} \Bigg _0^{2\pi}$
76		$P_H = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{V_{Hmax} \cdot m \cdot R_s}{2 \cdot a} \cdot \left\{ \cos(\beta) \cdot 0 + \sin(\beta) \cdot \left[-\frac{2 \cdot \pi}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt[2]{1-b^2}} \right] \right\} = \frac{\omega \cdot V_{Hmax} \cdot m \cdot R_s}{a \cdot b} \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{1 - \sqrt[2]{1-b^2}}{\sqrt[2]{1-b^2}}$
77		$p_{mean} = \frac{m \cdot R_s}{a \cdot \sqrt[2]{1-b^2}}$
78		$P_H = \omega \cdot V_{Hmean} \cdot \frac{m \cdot R_s}{a \cdot \sqrt[2]{1-b^2}} \cdot \frac{1 - \sqrt[2]{1-b^2}}{b} \cdot \sin(\beta)$
79		$P_H = \frac{2\pi \cdot n}{60} \cdot V_{Hmean} \cdot p_{mean} \cdot \frac{1 - \sqrt[2]{1-b^2}}{b} \cdot \sin(\beta)$
80		$P_H = \omega \cdot \frac{V_{Hmax}}{2} \cdot p_{mean} \cdot \frac{1 - \sqrt[2]{1-b^2}}{b} \cdot \sin(\beta)$

81	Geleistete Arbeit der heißen Seite während 1 Umdrehung der Kurbelwelle Effected work of the hot side during 1 turn of crank shaft	$W_H = 2 \cdot \pi \cdot V_{Hmean} \cdot p_{mean} \cdot \frac{1 - \sqrt[2]{1 - b^2}}{b} \cdot \sin(\beta)$
82		
83	Leistung der kalten Seite Power of the cold side	Analog:
84		$P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \oint p \cdot \frac{dV_c}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi \cdot \omega} p \cdot \frac{dV_c}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} p \cdot \frac{dV_c}{d\varphi} \cdot \omega \cdot d\varphi = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\omega \cdot m \cdot R_s}{a \cdot \{1 - b \cdot \cos(\varphi + \beta)\}} \cdot dV_H$
85		$dV_c = \frac{d}{d\varphi} \{V_{Cmean} \cdot [1 - \cos(\varphi - \alpha) + V_{KD}]\} \cdot d\varphi = V_{Cmean} \cdot \sin(\varphi - \alpha) \cdot d\varphi = V_{Cmean} \cdot [\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\varphi + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\varphi + \beta)] \cdot d\varphi$
86	Transformation	$\sin(\varphi - \alpha) = \sin\{(\varphi + \beta) - (\alpha + \beta)\} = \sin(\varphi + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) - \cos(\varphi + \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$
87		$P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\omega \cdot V_{Cmean} \cdot m \cdot R_s}{a} \cdot \left\{ \cos(\alpha - \beta) \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi + \beta)}{(1 - b \cdot \cos(\varphi + \beta))} \cdot d\varphi - \sin(\alpha + \beta) \cdot \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(\varphi + \beta)}{(1 - b \cdot \cos(\varphi + \beta))} \cdot d\varphi \right] \right\}$
88		$P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\omega \cdot V_{Cmean} \cdot m \cdot R_s}{a} \cdot \left\{ \cos(\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{b} \cdot [\ln(1 - b \cdot \cos(\varphi + \beta))] - \sin(\alpha + \beta) \cdot \left[-\frac{(\varphi + \beta)}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{2}{\sqrt[2]{1 - b^2}} \cdot \arctan \frac{(1 + b) \cdot \tan\left(\frac{\varphi + \beta}{2}\right)}{\sqrt[2]{1 - b^2}} \right] \right\} \Bigg _0^{2\pi}$ <i>info: arctan(0) = 0, π, 2π, 3π, ...</i>
89		$P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\omega \cdot V_{Cmean} \cdot m \cdot R_s}{a} \cdot \left\{ \cos(\alpha + \beta) \cdot 0 - \sin(\alpha + \beta) \cdot \left[-\frac{2 \cdot \pi}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt[2]{1 - b^2}} \right] \right\} = \frac{V_{Cmean} \cdot \pi \cdot m \cdot R_s}{a \cdot b} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \frac{1 - \sqrt[2]{1 - b^2}}{\sqrt[2]{1 - b^2}}$
90		
91		$P_C = -\omega \cdot V_{Cmean} \cdot \frac{m \cdot R_s}{a \cdot \sqrt[2]{1 - b^2}} \cdot \frac{1 - \sqrt[2]{1 - b^2}}{b} \cdot \sin(\beta + \alpha)$
92		$P_C = -\omega \cdot V_{Cmean} \cdot p_{mean} \cdot \frac{1 - \sqrt[2]{1 - b^2}}{b} \cdot \sin(\beta + \alpha)$

93		$P_C = -\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} \cdot V_{Cmean} \cdot p_{mean} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{1 - b^2}}{b} \cdot \sin(\beta + \alpha)$
94	Arbeit der kalten Seite während 1 Umdrehung der Kurbelwelle Effected work of the cold side during 1 turn of crank shaft	$W_C = -2 \cdot \pi \cdot V_{Cmean} \cdot p_{mean} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{1 - b^2}}{b} \cdot \sin(\beta + \alpha)$
95	Gesamtleistung	
96		$P = P_H + P_C = \omega \cdot \frac{m \cdot R_s}{a \cdot \sqrt[3]{1 - b^2}} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{1 - b^2}}{b} \cdot [V_{Hmean} \cdot \sin(\beta) - V_{Cmean} \cdot \sin(\beta + \alpha)]$
97		$P = P_H + P_C = \omega \cdot p_{mean} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{1 - b^2}}{b} \cdot [V_{Hmean} \cdot \sin(\beta) - V_{Cmean} \cdot \sin(\beta + \alpha)]$
98		$P = P_H + P_C = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} \cdot p_{mean} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{1 - b^2}}{b} \cdot [V_{Hmean} \cdot \sin(\beta) - V_{Cmean} \cdot \sin(\beta + \alpha)]$
99	Gesamtarbeit nach Schmidt während 1 Umdrehung der Kurbelwelle: Complete work during 1 turn of the crank shaft	$W = 2 \cdot \pi \cdot p_{mean} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{1 - b^2}}{b} \cdot [V_{Hmean} \cdot \sin(\beta) - V_{Cmean} \cdot \sin(\beta + \alpha)]$
100	Volumen des Systems nach Schmidt Volumen of the system	$V = V_{Hmean} \cdot [1 - \cos(\varphi)] + V_{HD} + V_R + V_{Cmean} \cdot [1 - \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha)] + V_{CD}$
101	Extremwerte des Volumens Extreme values	$\frac{dV_{var}}{d\varphi} = [V_{Hmean} + V_{Cmean} \cdot \cos(\alpha)] \cdot \sin(\varphi) - V_{Cmean} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\varphi) = 0$
102	Winkel für Minimalvolumen Angle of the minimum of the volume	$\varphi(V_{min}) = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha) \cdot V_{Cmean}}{V_{Hmean} + \cos(\alpha) \cdot V_{Cmean}}\right)$
103	Winkel für Maximalvolumen Angle of the maximum of volume	$\varphi(V_{max}) = \pi + \arctan\left(\frac{\sin(\alpha) \cdot V_{Cmean}}{V_{Hmean} + \cos(\alpha) \cdot V_{Cmean}}\right)$
104	Wirkungsgrad Efficiency	$\eta = \frac{W}{W_H} = 1 + \frac{W_C}{W_H}$ [Carnot-Wirkungsgrad: $\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H}$]
105		Mit der aktuellen Rechentechnik lassen sich diese Berechnungen mit der genaueren Beschreibung des veränderlichen Kolbenweges auch genauer durchführen, auch wenn die Berechnung unter diesen Umständen mittels numerischer Integration erfolgt. Es werden aber keine großen Auswirkungen auf das Ergebnis erwartet. Die beschriebenen Zusammenhänge werden in ein Excel-Programm überführt.
106		

107	Quellen / Sources	Koichi Hirata: "SCHMIDT THEORY FOR STIRLING ENGINES", 1997, http://www.bekkoame.ne.jp/~khirata/academic/schmidt/schmidt.htm
108		I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig: Taschenbuch der Mathematik, 4., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1999, Verlag Harri Deutsch
109		Frank Schleder, Stirlingmotoren, 3. Auflage, 2008, Vogel Buchverlag
110		H.-J. Bartsch: Taschenbuch mathematischer Formeln, 18., verbesserte Auflage, 1999, Fachbuchverlag Leipzig im Carl-Hanser-Verlag

Bladt