

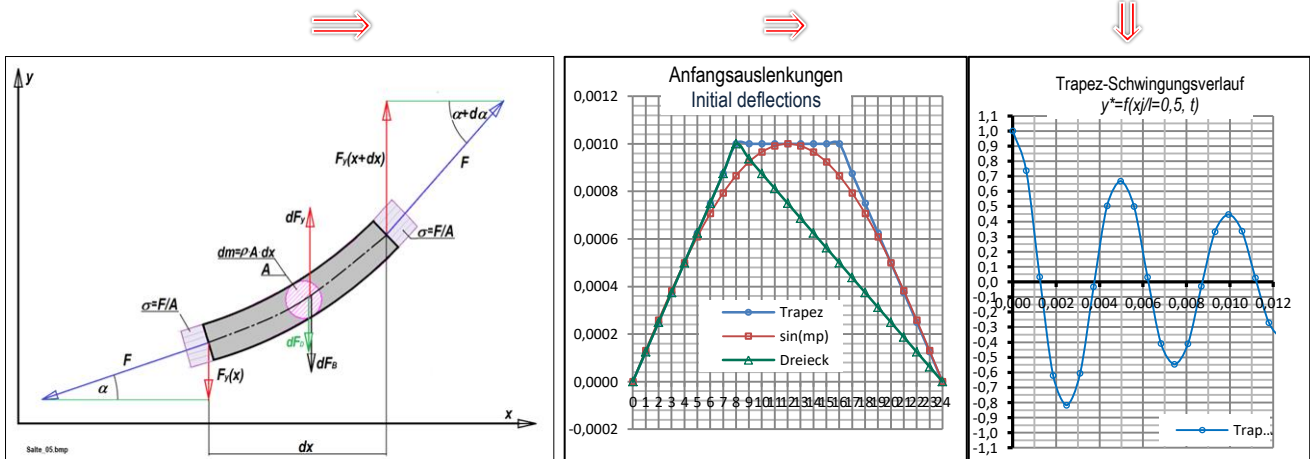
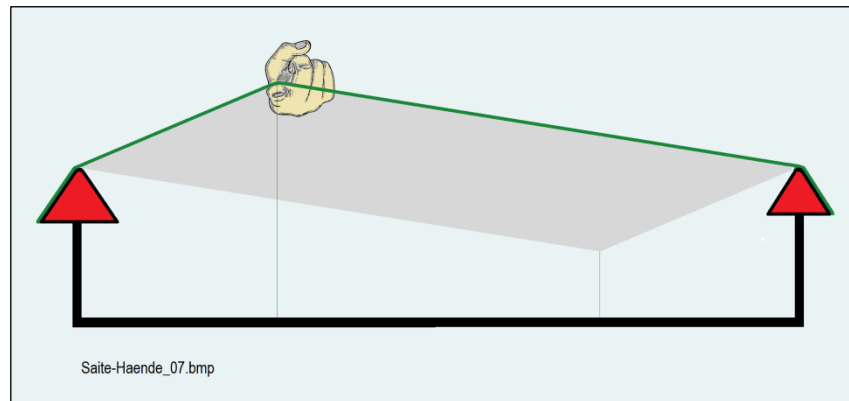
Schwingungsgleichung einer gespannten Saite

Lösung der eindimensionalen Wellengleichung für gedämpfte Schwingungen mit konstanten Anfangs- und Randbedingungen

Oscillation equation of a tensioned string

Solution of the one-dimensional wave equation for damped oscillations with constant initial and boundary conditions

Contact: www.jblatt.de



permanently under construction

Die Dokumentation wurde mit bestem Wissen und Gewissen erarbeitet. Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle erhebt die Dokumentation keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Unbeabsichtigte Fehler können auftreten. Hinweise auf inhaltliche Verbesserungen sind erwünscht. Für die Vervielfältigung des Dokumentes und die Übernahme von Auszügen ist die Zustimmung des Autors erforderlich. Für den Inhalt verlinkter Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

The paper was prepared to best of one's knowledge. The paper makes no claim to be complete and correct in spite of the careful control. References for improvements with regard to the content are welcome.

The duplication of the document and the taking over abridges require the approval of the author. The linked WEB-Site operators are responsible for contents of their own sites.

Zwei Dinge sind zu unserer Arbeit nötig: unermüdliche Ausdauer und die Bereitschaft, etwas, in das man viel Arbeit gesteckt hat, wieder wegzwerfen ← A. E.



Schwingungsgleichung einer gespannten Saite (Lösung der eindimensionalen Wellengleichung für gedämpfte Schwingungen mit konstanten Anfangs- und Randbedingungen) Oscillation equation of a tensioned string (Solution of the one-dimensional wave equation for damped oscillations with constant initial and boundary conditions)		A000
Motivation	Motivation	
<p>Die Lösung der Schwingungsgleichung ist hinreichend aus der Literatur bekannt, mich hat dabei interessiert:</p> <ul style="list-style-type: none"> Die Ableitung der Schwingungsgleichung, der Separationsansatz zur Lösung der Differentialgleichung, die Darstellung einer beliebigen Auslenkung einer Saite in ihrer Ausgangsposition durch eine Fourier-Reihe, die Auslenkung der Saite in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Fourier-Reihe, die durchgängige Darstellung der Ableitung und Lösung der Schwingungsgleichung bis zu einem Lösungsbeispiel, ein Beispiel zum Einschätzen des Aufwandes für eine akzeptable Lösung / Anzahl der erforderlichen Stützstellen / Eigenfrequenzen, die zu einer brauchbaren Lösung führen, die Nutzung der Möglichkeit einer dimensionslosen Darstellung. 	<p>The solution of the oscillation equation is well known from the literature, I was interested in:</p> <ul style="list-style-type: none"> the derivation of the oscillation equation, the separation approach to solving the differential equation, The representation of any deflection of the string in its initial position by a Fourier series, The deflection of the string as a function of time by a Fourier series, the consistent presentation of the derivation and solution of the oscillation equation up to a solution example, An example for estimating the effort for an acceptable solution / number of required supporting points / natural frequencies, which leads to a viable solution, the use of the possibility of dimensionless representation 	A001
<p>Bemerkungen: Es werden sich Wiederholungen bei der Abhandlung der Thematik ergeben, da ich mich auf ein Gebiet begeben habe, das mir nicht besonders geläufig ist und ich Fehler vermeiden möchte.</p>	<p>Remark: There will be repetitions in the treatise, because I move to a field that I am not very familiar with and I want to avoid mistakes.</p>	A002
		A003

Formelzeichen		Formula symbols	B000
			B001
$F [kg \cdot m/s^2]$	Resultierende Kraft senkrecht zur Schnittfläche A	Resulting force perpendicular to the cut surface A	B002
$F_y [kg \cdot m/s^2]$	Kraft in y-Richtung (senkrecht) / Rückstellkraft	Force in y-direction / Restoring force	B003
$F_B [kg \cdot m/s^2]$	Beschleunigungskraft in y-Richtung / Massenkraft	Acceleration force in y-direction / Mass force	B004
$\rho_S [kg/m^3]$	Dichte des Saitenwerkstoffes	Density of the string material	B005
$\rho_L [kg/m^3]$	Dichte des umgebenden Mediums (Luft)	Density of the surrounding medium (air)	B006
$\nu_L [s^2/m]$	Kinematische Viskosität: $\nu_L = \eta_L / \rho_L$	Kinematic viscosity	B007
$\eta_L [kg/(m \cdot s)]$	Dynamische Viskosität	Dynamic viscosity	
$d_S [m]$	Durchmesser der Saite	Diameter of string	B008
$A_S [m^2]$	Querschnittsfläche der Saite	Cross-sectional area of the string	B009
$l [m]$	Länge der Saite	Length of string	B010
$t [s]$	Zeit	Time	B011
			B012
			B013
$\alpha [-]$	Krümmungswinkel der Saite	Curvature angle of the string	B014
$d\alpha [-]$	Änderung des Krümmungswinkels	Change of curvature angle of the string	B015
λ	Exponent bei der Lösung der DGL'n	Exponent in the solution of the DGL's	B016
ω_j	Teil des Exponent bei der Lösung der DGL T(t)	Part of exponent in the solution of the DGL	B017
ε	Teil des Exponent bei der Lösung der DGL T(t)	Part of exponent in the solution of the DGL	B018
			B019
			B020
$t [s]$	Zeit	Time	B021
$x [m]$	Längenkoordinate	Length coordinate	B022
$\bar{x} = \frac{x}{l} [-]$	Dimensionslose Längenkoordinate	Dimensionless length coordinate	B023
$x_j [m]$	Längenkoordinate für den Punkt j	length coordinate for the point j	B024



dx [m]	Differenzielle Längeneinheit	Differential length unit	B025
$y(x, t)$ [m]	Auslenkung der Saite an der Stelle x zur Zeit t	Deflection of the string at point x at time t	B026
$\bar{y} = \frac{y}{y_{max}}$ [-]	Dimensionslose Auslenkung der Saite	Dimensionless deflection of the string	B027
			B028
$y_j(t)$ [m]	Auslenkung der Saite an der Stelle x_j zur Zeit t	Deflection of the string at the point x_j at time t	B029
dy [m]	Änderung der Auslenkung	Change of deflection	B030
			B031
			B032
Ableitungen		Derivations	B033
$y' = \frac{y(x,t)}{dx}$ [-]	Örtliche Ableitung (Neigung)	Local derivation (gradient)	B034
$y'' = \frac{y^2(x,t)}{dx^2}$ [-]	Krümmung	Curvature	B035
$\dot{y} = \frac{y(x,t)}{dt}$ [-]	Zeitliche Ableitung (Geschwindigkeit)	Time derivation (velocity)	B036
$\ddot{y} = \frac{y^2(x,t)}{dt^2}$ [-]	Beschleunigung	Acceleration	B037
			B038
$\sigma \left[\frac{kg}{m \cdot s^2} \right]$	Zugspannung in der Saite $\frac{F_R}{A}$	Tensile stress in the string $\frac{F_R}{A}$	B039
$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_s}} \left[\frac{m}{s} \right]$	Konstante	Constant	B040
ω_1	Grundfrequenz für die Schwingungsgleichung	Fundamental frequency for the oscillation equation	B041
$D \left[\frac{kg}{s} \right]$	Dämpfungskonstante / Proportionalitätsfaktor	Damping constant / factor of proportionality	B042
			B043
$Y(\bar{x})$	Ortsfunktion für den Separationsansatz	Location function for the separation approach	B044
$T(t)$	Zeitfunktion für den Separationsansatz	Time function for the separation approach	B045
r [-]	Exponent für die Lösung der Differentialgleichung	Exponent for the solution of the differential equation	B046
λ	Gemeinsame Konstante der DGL'n	Common constant of the DGL's	B047
C_1, C_2	Integrationskonstanten	Integration constants	B048
A^*, B^*, C^*, D^*	Integrationskonstanten	Integration constants	B049
A, B	Integrationskonstanten	Integration constants	B050
i	Imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$	Imaginary unit $i = \sqrt{-1}$	B051
			B052
i [-]	Laufindex: $i = 1 \dots m$	Running Index: $i = 1 \dots m$	B053
j [-]	Laufindex: $j = 1 \dots n$	Running Index: $j = 1 \dots n$	B054
k [-]	Laufindex: $k = 1 \dots n$	Running Index: $k = 1 \dots n$	B055
K_{T1}, K_{T2}	Zusammenfassende Konstanten in der Differentialgleichung	Summery constants in the differential equation	B056
A_j [-], A_k [-]	Schwingungsamplitude für $t = 0$, Anfangsauslenkung	Vibration amplitude for $t = 0$, initial deflection	B057
			B058
	Nicht aufgeführte Formelzeichen sind in den folgenden Ausführungen erklärt.	Unlisted symbols are explained in the following explanations.	B059
			B060

<p>Skizze zur Problemerkklärung Geometrie und Kräfte an einem differenzielles Element</p> <p>Sketch for problem explanation Geometry and forces of a differential element</p>		C01
---	--	-----

Annahmen Assumptions		
1	Ebene Betrachtung <i>one-dimensional consideration</i>	D001
2	Vernachlässigung der Schwerkraft <i>Neglecting of the gravity</i>	D002
3	Berücksichtigung einer linear geschwindigkeitsabhängigen Dämpfung <i>Consideration of a linear velocity-dependent damping</i>	D003
4	Die Saite ist vollkommen elastisch <i>The string is completely elastic</i>	D004
5	Für die Länge gilt: <i>Länge l >> Durchmesser d</i> <i>For the length: length l > diameter d</i>	D005
6	Die Auslenkung der Saite ist klein (kleine Winkeländerungen) <i>The deflection of the string is small (small angle changes)</i>	D006
7	Sehr schlankes, gekrümmtes, (zylindrisches) Gebilde mit kleinem, konstantem Querschnitt A <i>Very narrow, curved, cylindrical structure with a small, constant cross-section A</i>	D007
8	Geringer Einfluss der Biegung (vernachlässigbar) <i>Low influence of bending (negligible)</i>	D008
9	Die Saite ist so vorgespannt, so dass kleine Auslenkungen <u>keine</u> wesentliche Veränderung der Längskraft F bzw. Spannung $\sigma = F/A$ (innere Kraft) hervorrufen. <i>The string is prestressed so that small deflections do not cause any substantial change in the longitudinal force F or Stress $\sigma = F/A$ (internal force).</i>	D009
10	Längskraft ist konstant und senkrecht zur Querschnittfläche gerichtet und zieht die Saite in die Ruhelage zurück. <i>Longitudinal force is constant and directed perpendicular to the cross-sectional area and pulls the string back to the rest position.</i>	D010
		D011
11	Die Auslenkung an beiden Einspannseiten ist $y(x=0, t) = 0, y(x=l, t) = 0$ <i>The deflection at both clamping sides is $y(x=0, t) = 0, y(x=l, t) = 0$</i>	D012
12	Geschwindigkeit und Beschleunigung beider Seiten ist $\dot{y}(x=0, t) = 0$ und $\ddot{y}(x=0, t) = 0$ <i>Velocity and acceleration on both sides is $\dot{y}(x=0, t) = 0$ and $\ddot{y}(x=0, t) = 0$</i>	D013
		D014

<p>Allgemeine Gleichung für das Kräftegleichgewicht <i>General equation for the equilibrium of forces</i></p>	$\frac{\text{Rückstellkraft}}{\text{Restoring force}} : dF_y = \frac{\text{Massenkraft}}{\text{Mass force}} : dF_B + \frac{\text{Dämpfungskraft}}{\text{Damping force}} : dF_D$	E001
		E002

<p>Ableitung der Schwingungsgleichung <i>Derivation of the oscillation equation</i></p>		F000
Massen-/Beschleunigungskraft	dF_B	
Masse des eines differentiellen Elementes	$dm = \rho \cdot A_s \cdot \frac{dx}{\cos\alpha} \approx \rho \cdot A_s \cdot dx$	F001
Beschleunigung eines Elementes <i>Acceleration of an element</i>	$\ddot{y}(x, t) = d^2y/dt^2$	F002



Beschleunigungskraft (Newton) Acceleration Force (Newton)	$dF_B(x, t) = dm \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \rho \cdot ds \cdot dx \cdot d^2y/dt^2$	F003
		F004
		F005
Rückstellkraft	dF_y	F006
Auf Querschnitt bezogene Normalkraft (Normalspannung) Cross-sectional normal force (normal tension)	$\sigma(x, t) = \frac{F(x, t)}{A} = \sigma \approx const, \text{ da } \alpha \text{ klein ist, ist } F(x, t) \approx const$ $\sigma(x, t) = F(x, t) / A = \sigma \approx const, \text{ since } \alpha \text{ is small, therefore is } F(x, t) \approx const$	F007
Begrenzung eines Differentielles Element Limitation of a differential element	$x, \alpha(x, t) \qquad \qquad \qquad x + dx, \alpha(x + dx, t)$	F008
Rückstellende Kraft restoring force	$F_y(x, t) = -F(x, t) \cdot \sin \alpha \qquad F_y(x + dx, t) = F(x, t) \cdot \sin(\alpha + d\alpha)$	F009
	$F_y(x, t) = -\sigma \cdot A_S \cdot \sin \alpha \qquad F_y(x + dx, t) = \sigma \cdot A_S \cdot \sin(\alpha + d\alpha)$	F010
Resultierende rückstellende Kraft Resulting force	$dF_y(x, t) = F_y(x, t) + F_y(x + dx, t) = -\sigma \cdot A_S \cdot \sin \alpha + \sigma \cdot A_S \cdot \sin(\alpha + d\alpha)$	F011
	$dF_y(x, y) = \sigma \cdot A_S \cdot (\sin(\alpha + d\alpha) - \sin \alpha)$	F012
Für kleine Winkel gilt For small angles applies	$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \sin d\alpha \approx d\alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad \cos d\alpha \approx 1, \quad \tan \alpha \approx \alpha$	F013
		D014
Damit ist Therefore is	$dF_y(x, t) = \sigma \cdot A_S \cdot (\sin(\alpha + d\alpha) - \sin \alpha) \approx \sigma \cdot A_S \cdot (\alpha + d\alpha - \alpha)$	F015
	$dF_y(x, t) \approx \sigma \cdot A_S \cdot d\alpha$	F016
Wie groß ist der Winkel $d\alpha$		F017
Winkel der Saite an der Stelle x Angle of the string at the point x	$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha \approx \alpha$	F018
Winkeländerung an der Stelle x Angle change at the point x	$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{d\alpha}{dx}$	F019
	$dF_y(x, t) \approx \sigma \cdot A_S \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx$	F020
		F021
Widerstandskraft durch Dämpfung	dF_D	
Kurze Vorbetrachtung	<p>Allgemein wird die Dämpfungskraft als geschwindigkeitsproportional angenommen. Was sinnvoll für weitere analytische Bearbeitung erscheint, da die Geschwindigkeit der Saite örtlich und zeitlich periodisch veränderliche Werte annimmt. Ist die Dämpfung nicht linear, dann ist eine geschlossene mathematische Abhandlung des Problems erschwert. (Hier sei erinnert an den Widerstandsbeiwert aus der Aerodynamik $F = C_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \dot{y}^2$.)</p> <p>In die Berechnung wird deshalb ein konstanter Dämpfungsbeiwert D im Bereich</p> $0 \leq D \ll \frac{2\pi}{l} \cdot \sqrt{\rho_S \cdot \sigma}$ <p>keine Dämpfung konstante Amplitude</p> <p>Saite bleibt in der Ausgangsposition (eingefroren)</p> <p>verwendet, der einen Mittelwert darstellt und linear mit der Geschwindigkeit (Produkt) gekoppelt ist. Dieser Dämpfungsbeiwert ist auf ein Volumen bezogen. Er beinhaltet material- und gestaltspezifische Faktoren sowie Einflüsse des umgebenden Mediums, in dem die Schwingung stattfindet.</p>	F022
Short preview	<p>In general, the damping force is assumed to be proportional to the speed. Which makes sense for further analytical processing, since the speed of the string assumes periodically and temporally variable values. If the attenuation is not linear, then a closed mathematical treatment of the problem is difficult. (Here is reminiscent of the drag coefficient from the aerodynamics $F = C_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \dot{y}^2$.)</p> <p>The calculation therefore uses a constant damping D factor</p> $0 \leq D \ll \frac{2\pi}{l} \cdot \sqrt{\rho_S \cdot \sigma}$ <p>No damping constant amplitude</p> <p>String remains in the starting position (frozen)</p> <p>which represents an average value and is coupled linearly with the speed (product). This damping coefficient is related on one volume. It contains material- and shape-specific factors as well as influences of the surrounding medium in which the vibration takes place.</p>	F023
Dämpfungsfaktor	Für geschwindigkeitsproportionale Dämpfung geringer Größe: $D \left[\frac{kg}{s \cdot m^3} \right]$	F024
Abhängigkeiten der Dämpfung Dependencies of damping	$F_D \sim A_S, \quad F_D \sim l, \quad F_D \sim \eta_L, \quad F_D \sim \dot{y}(x, t), \quad \Rightarrow D = \frac{\text{Proportionalitätsfaktor}}{\text{Factor of proportionality}} = const$	F025
Dämpfungs- / Widerstandskraft auf einer Länge dx Damping force / resistance on a length dx	$dF_D(x, t) = D \cdot A_S \cdot dx \cdot \dot{y}(x, t)$	F026
		F027
		F028
Kräftegleichgewicht Balance of forces	$dF_y(x, t) = dF_B(x, t) + dF_D(x, t)$	G001



$A_S = \frac{\pi \cdot d_S^2}{4}$	$\sigma \cdot A_S \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx = \rho_S \cdot A_S \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot dx + D \cdot A_S \cdot dx \cdot \frac{dy}{dt}$	G002
	$\sigma \cdot A_S \cdot y'' \cdot dx = \rho_S \cdot A_S \cdot dx \cdot \ddot{y} + D \cdot A_S \cdot dx \cdot \dot{y}$	G003
		G004
	$y'' = \frac{\rho_S}{\sigma} \cdot \ddot{y} + \frac{D}{\sigma} \cdot \dot{y}$	G005
$\bar{y} = \frac{y}{y_{max}}, \bar{x} = \frac{x}{l}, d\bar{x}^2 = \frac{dx^2}{l^2}$	$\bar{y}'' = \frac{\rho_S \cdot l^2}{\sigma} \cdot \ddot{\bar{y}} + \frac{D \cdot l^2}{\sigma} \cdot \dot{\bar{y}}$	G006
Dimensionslos / Dimensionless	$\bar{y}'' = K_B \cdot \ddot{\bar{y}} + K_D \cdot \dot{\bar{y}}$	G007
	$K_B = \frac{\rho_S \cdot l^2}{\sigma} [s^2]$	G008
	$K_D = \frac{D \cdot l^2}{\sigma} [s]$	G009
	Da mir für den Dämpfungsbeiwert D keine Werte geläufig sind, wird K_D als eine zu vorgegebende Größe betrachtet. Since I do not know any values for the damping coefficient D, K_D is considered as a size to be specified.	G010

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung (DGL) für $y(x, t)$ General solution of the differential equation (DGL) for $y(x, t)$		H000	
	$\bar{y}'' = K_B \cdot \ddot{\bar{y}} + K_D \cdot \dot{\bar{y}}$	H001	
	$\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} = K_B \cdot \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} + K_D \cdot \frac{d\bar{y}}{dt}$		
Separationsansatz Approach for the separation in a local function and in time function	Produkt aus zwei, jeweils nur von nur einer der Variablen x oder t abhängigen Funktionen Product of two functions, each dependent on only one of the variables x or t	H002	
	$\bar{y}(\bar{x}, t) = Y(\bar{x}) \cdot T(t)$	H003	
Ableitung nach der Zeit (t) Derivation after the time (t)	$K_B \cdot \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} + K_D \cdot \frac{d\bar{y}}{dt} = \left(K_B \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + K_D \cdot \frac{dT(t)}{dt} \right) \cdot Y(\bar{x})$	H004	
	$K_B \cdot \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} + K_D \cdot \frac{d\bar{y}}{dt} = (K_B \ddot{T}(t) + K_D \cdot \dot{T}(t)) \cdot Y(\bar{x})$	H005	
Ableitung nach dem Ort (x) Derivation after the location (x)	$\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} = \frac{d^2 Y(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \cdot T(t)$	H006	
	$\frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{x}^2} = Y''(\bar{x}) \cdot T(t)$	H007	
	$Y''(\bar{x}) \cdot T(t) = (K_{T2} \ddot{T}(t) + K_{T1} \cdot \dot{T}(t)) \cdot Y(\bar{x})$	H008	
Zu lösende Gleichung To be solved equation	$\frac{Y''(\bar{x})}{Y(\bar{x})} = K_B \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + K_D \cdot \frac{\dot{T}(t)}{T(t)}$	H009	
		H010	
Für diese Gleichung gilt: Feststellung Determination	Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von x abhängt, müssen beide Seiten konstant ($= -\lambda^2$) sein, um die Gleichung zu erfüllen. Since the left side only depends on t and the right side only on x , both sides must be constant ($= -\lambda^2$) to satisfy the equation.	H011	
Die Gemeinsame Konstante für beide Gleichungen ermöglicht getrennte Lösungen Common constants for both equations allow for separate solutions	$\frac{Y''(\bar{x})}{Y(\bar{x})} = K_B \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + K_D \cdot \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda^2$	H012	
	λ ist eine noch unbekannte, aus den Anfangs- und Randbedingungen zu ermittelnde Konstante. λ is a still unknown constant to be determined from the initial and boundary conditions	H013	
	Zeitabhängige Gleichung Time-dependent equation	Ortsabhängige Gleichung Location-dependent equation	H014
	$K_B \cdot \ddot{T}(t) + K_D \cdot \dot{T}(t) = -\lambda^2 \cdot T(t)$	$Y''(\bar{x}) = -\lambda^2 \cdot Y(\bar{x})$	H015
	$\ddot{T}(t) + \frac{K_D}{K_B} \cdot \dot{T}(t) = -\frac{\lambda^2}{K_{T2}} \cdot T(t)$		H016
			H017



Allgemeine Lösung der DGL für $T(t)$ General solution of the DGL for $T(t)$	$\ddot{T}(t) + \frac{K_D}{K_B} \cdot \dot{T}(t) + \frac{\lambda^2}{K_B} \cdot T(t) = 0$	I000
Ansatz zur Lösung Approach for solution	$T(t) = e^{r \cdot t}$	I001
	$r^2 \cdot e^{r \cdot t} + r \cdot \frac{K_{T1}}{K_{T2}} \cdot e^{r \cdot t} + \frac{\lambda^2}{K_{T2}} \cdot e^{r \cdot t} = 0$	I002
	$r^2 + r \cdot \frac{K_D}{K_B} + \frac{\lambda^2}{K_B} = 0$	I003
zwei (2) Lösungen One (1) root leads to two (2) solutions	$r_{1/2} = -\frac{K_D}{2 \cdot K_B} \pm \sqrt{\left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}} = \begin{matrix} \Rightarrow -\frac{K_D}{2 \cdot K_B} \pm \sqrt{\left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}} \\ \text{Real} \quad \text{imaginärer } \sqrt{<0} \\ \Rightarrow -\frac{K_D}{2 \cdot K_{TB2}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}} \\ \text{Real} \quad \text{real } \sqrt{\geq 0} \end{matrix}$	I004
Wenn $\sqrt{\text{negativ}(-)}$, dann Exponent mit imaginären Anteil If $\sqrt{\text{negativ}(-)}$, then exponent with imaginary part	$\omega_j = i \cdot \sqrt{\left \left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}\right } = i \cdot \sqrt{\left \beta^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}\right }$	I005
Wenn $\sqrt{\text{positiv}(+)}$, dann Exponent real If $\sqrt{\text{positiv}(+)}$, then exponent is real.	$\omega_j^* = \sqrt{\left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}} = \sqrt{\beta^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}}$	I006
Realer Anteil des Exponenten	$\beta = -\frac{K_D}{2 \cdot K_B}$	I007
Lösung mit imaginären Exponenten Solution with imaginary exponents	$T(t) = C_1 \cdot e^{\left(-\frac{K_D}{2 \cdot K_B} + i \cdot \sqrt{\left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}}\right) \cdot t} + C_2 \cdot e^{\left(-\frac{K_D}{2 \cdot K_B} - i \cdot \sqrt{\left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}}\right) \cdot t}$	I008
$\left(\frac{K_{T1}}{2 \cdot K_{T2}}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_{T2}} < 0$	$T(t) = e^{\beta \cdot t} (C_1 \cdot e^{+i \cdot \omega_j \cdot t} + C_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_j \cdot t})$	I009
		I010
Lösung mit realen Exponenten Solution with real exponents	$T(t) = C_1 \cdot e^{\left(\beta + \sqrt{\left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_{T2}}}\right) \cdot t} + C_2 \cdot e^{\left(\beta - \sqrt{\left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_B}}\right) \cdot t}$	I011
$\left(\frac{K_{T1}}{2 \cdot K_{T2}}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_{T2}} \geq 0$ <i>Für diesen Fall sind keine Schwingungen zu erwarten</i> In this case, no vibrations are expected	$T(t) = e^{\beta \cdot t} (C_1 \cdot e^{+\omega^* \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\omega^* \cdot t})$	I012

		J001
Zusammenhang von trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen (Eulersche Formeln) Connection of trigonometric functions and exponential functions (Euler's formulas)	$e^{+i \cdot \omega_j \cdot t} = \cos(\omega_j \cdot t) + i \cdot \sin(\omega_j \cdot t)$	J002
	$e^{-i \cdot \omega_j \cdot t} = \cos(\omega_j \cdot t) - i \cdot \sin(\omega_j \cdot t)$	J003
	$\sin(\omega_j \cdot t) = \frac{e^{+i \cdot \omega_j \cdot t} - e^{-i \cdot \omega_j \cdot t}}{2 \cdot i}$	J004
	$\cos(\omega_j \cdot t) = \frac{e^{+i \cdot \omega_j \cdot t} + e^{-i \cdot \omega_j \cdot t}}{2}$	J005

		K000
Allgemeine Lösung für $T(t)$ General solution $T(t)$	$T(t) = e^{\beta \cdot t} \cdot (C_1 \cdot (\cos(\omega_j \cdot t) + i \cdot \sin(\omega_j \cdot t)) + C_2 \cdot (\cos(\omega_j \cdot t) - i \cdot \sin(\omega_j \cdot t)))$	K001
	$T(t) = e^{\beta \cdot t} \cdot ((C_1 + C_2) \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin(\omega_j \cdot t))$	K002
Zusammenfassung der Konstanten Summary of the constants	Da die Konstanten C_1 und C_2 sich erst aus den Anfangsbedingungen ergeben, kann gesetzt werden (Kunstgriff): Since the constants C_1 and C_2 arise only from the initial conditions, can be set (artifice):	K003
<i>Kleine Enzyklopädie Mathematik, 1979, VEB Bibliographisches Institut Leipzig, S. 559</i>	$A^* = C_1 + C_2$	K004
	$B^* = i \cdot (C_1 - C_2)$	K005
Gleichung für die zeitliche Abhängigkeit des Schwingungsausschlages (Weg) Equation for the temporal dependence of the swing (path)	$T(t) = e^{\beta \cdot t} \cdot (A^* \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + B^* \cdot \sin(\omega_j \cdot t))$	K006
		K007



		L000
Allgemeine Lösung der DGL $Y(x)$ General solution of DGL $Y(x)$	$Y''(\bar{x}) + \lambda^2 \cdot Y(\bar{x}) = 0$	L001
Ansatz approach	$Y(x) = e^{r \cdot \bar{x}}$	L002
	$r^2 \cdot e^{r \cdot \bar{x}} + \lambda^2 \cdot e^{r \cdot \bar{x}} = 0$	L004
	$r^2 + \lambda^2 = 0$	L005
Eine (1) Wurzel führt zu zwei (2) Lösungen One (1) root leads to two (2) solutions	$r_{1/2} = \pm i \cdot \lambda$	L006
	$Y(x) = C_1 \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot x} + C_2 \cdot e^{-i \cdot \lambda \cdot x}$	L007
Zusammenhang für trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen (Eulersche Formeln) Connection for trigonometric functions and exponential functions (Euler's formulas)	$e^{+i \cdot \lambda \cdot x} = \cos(\lambda \cdot x) + i \cdot \sin(\lambda \cdot x)$	L008
	$e^{-i \cdot \lambda \cdot x} = \cos(\lambda \cdot x) - i \cdot \sin(\lambda \cdot x)$	L009
	$\sin(\lambda \cdot t) = \frac{e^{+i \cdot \lambda \cdot x} - e^{-i \cdot \lambda \cdot x}}{2 \cdot i}$	L010
	$\cos(\lambda \cdot x) = \frac{e^{+i \cdot \lambda \cdot x} + e^{-i \cdot \lambda \cdot x}}{2}$	L011
Allgemeine Lösung für $Y(t)$ General solution for $Y(t)$	$Y(x) = C_1 \cdot (\cos(\lambda \cdot x) + i \cdot \sin(\lambda \cdot x)) + C_2 \cdot (\cos(\lambda \cdot \bar{x}) - j \cdot \sin(\lambda \cdot \bar{x}))$	L012
	$Y(x) = (C_1 + C_2) \cdot \cos(\lambda \cdot x) + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin(\lambda \cdot x)$	L013
Zusammenfassung der Konstanten Summary of the constants	Da die Konstanten C_1 und C_2 sich erst aus den Anfangsbedingungen ergeben, kann gesetzt werden (Kunstgriff): Since the constants C_1 and C_2 only result from the initial conditions, it is possible to set (artifice):	L014
<i>Kleine Enzyklopädie Mathematik, 1979, VEB Bibliographisches Institut Leipzig, S. 559</i>	$C^* = C_1 + C_2$	L015
	$D^* = i \cdot (C_1 - C_2)$	L016
Gleichung für die Zeitliche Abhängigkeit des Schwingungsausschlages (Weg) Equation for the temporal dependence of the swing (path)	$Y(\bar{x}) = C^* \cdot \cos(\lambda \cdot \bar{x}) + D^* \cdot \sin(\lambda \cdot \bar{x})$	L017
		L018

Bestimmung der Konstante λ Determination of the constant λ	λ ist die verbindende Größe / Konstante zwischen $T(t)$ und $Y(x)$ λ is the connecting quantity / constant between $T(t)$ and $Y(x)$		I000
			I001
Argumente Arguments	$T(t) = e^{\beta t} \cdot (A^* \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_j \cdot t))$	$Y(x) = C^* \cdot \cos(\lambda \cdot x) + D \cdot \sin(\lambda \cdot x)$	I002
Auslenkung der Saite Deflection of the string	$y(\bar{x}, t) = T(t) \cdot Y(\bar{x})$		I003
Kopplung der Gleichungen Merging the equations	$y(\bar{x}, t) = e^{\beta t} \cdot (A^* \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + B^* \cdot \sin(\omega_j \cdot t)) \cdot (C^* \cdot \cos(\lambda \cdot x) + D^* \cdot \sin(\lambda \cdot x))$		I004
Randbedingungen für die Ermittlung von $\sqrt{\lambda}$ Boundary conditions for the determination of $\sqrt{\lambda}$	$T(t) \cdot Y(\bar{x} = 0) = 0,$	$T(t) \cdot Y'(\bar{x} = 1) = 0$	I005
	Für $T(t)$ beliebig und die Randbedingungen $x = 0$ und $x = l$ gilt für die Ortsgleichung: For any $T(t)$ and the boundary conditions $x = 0$ and $x = 1$, the following applies to the local equation:		I006
Ortsgleichung local equation	$Y(\bar{x}) = C^* \cdot \cos(\lambda \cdot \bar{x}) + D^* \cdot \sin(\lambda \cdot \bar{x})$		I007
	$Y(\bar{x} = 0) = \underbrace{C^*}_{=0} \cdot \underbrace{\cos(\lambda \cdot 0)}_{=1} = 0$	$Y(\bar{x} = 1) = \underbrace{D^*}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\sin(\lambda \cdot 1)}_{=0} = 0$	I008
	$C^* = 0$	$\sin(\lambda \cdot 1) = \sin(\pi) = \sin(j \cdot \pi) = 0$	I009
	Für jedes ganzzahlige $j = 1, \dots, n$ gilt dann $\sin(j \cdot \pi) = 0$ For every integer $j = 1 \dots n$ is then $\sin(j \cdot \pi)$		I010
			I011
	Es gibt also n Lösungen für $\lambda = j \cdot \pi$ [-] So there are n solutions for $\lambda = j \cdot \pi$ [-]		I012
	$\omega_j = \sqrt{\left \left(\frac{K_D}{2 \cdot K_B} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{K_B} \right } = \sqrt{\left \beta^2 - \frac{(j \cdot \pi)^2}{K_B} \right }$		
Zeitgleichung Time equation	$T(t) = e^{\beta t} \cdot (A^* \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + B^* \cdot \sin(\omega_j \cdot t))$		I013

	$t = 0, j = 1$	
Feststellung Statement	Jede Eigenfrequenz $\omega_j = j \cdot \omega_1$ hat eine (1) Amplitude $\bar{y}_j(\bar{x}, t)$ der Saite zur Folge. Für beliebige Randbedingungen ist deshalb eine Überlagerung von n Schwingungen anzunehmen. Each natural frequency $\omega_n = j \cdot \omega_0$ results in one (1) amplitude $y_n(x, t)$ of the string. For any boundary conditions, therefore, a superposition of n oscillations is to be assumed.	J015
	$y_j(x, t) = \underbrace{D_j^* \cdot \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x})}_{Y(\bar{x})} \cdot \underbrace{e^{\beta \cdot t} \cdot (A^* \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + B^* \cdot \sin(\omega_j \cdot t))}_{T(t)}$	J016
Vereinfachung Simplification	$A_j = D_j^* \cdot A^*$ und $B_j = D_j^* \cdot B^*$,	J017
Gleichung für Auslenkung einer Saite Equation for deflection of a string	$\bar{y}_j(\bar{x}, t) = \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) \cdot e^{\beta \cdot t} \cdot (A_j \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + B_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t))$	J018
		J019

Vollständige Allgemeine Lösung Complete general solution	Die Lösung für $y(x, t)$ bei vorgegebenen Randbedingungen ist die Überlagerung aller möglichen Schwingungen The solution for $y(x, t)$ by given boundary conditions is the superposition of all possible vibrations	J000	
	$\bar{y}(\bar{x}, t) = e^{\beta \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) \cdot (A_j \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + B_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t))$	J001	
	$\dot{\bar{y}}(\bar{x}, t) = \beta \cdot e^{\beta \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) \cdot (A_j \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + B_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t)) + e^{\beta \cdot t} \cdot \omega \cdot \sum_{j=1}^{\infty} [\sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) \cdot \omega_j \cdot (-A_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t) + B_j \cdot \cos(\omega_j \cdot t))]$		
	$\ddot{\bar{y}}(\bar{x}, t) = e^{\beta \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \{ \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) \cdot [\beta \cdot (\omega_j \cdot (-A_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t) + B_j \cdot \cos(\omega_j \cdot t)) + \omega_j \cdot (-A_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t) + B_j \cdot \cos(\omega_j \cdot t)))] \}$		
Die Randbedingungen für beliebige Auslenkung The boundary conditions for any deflection	$\bar{y}(\bar{x} = 0, t) = \bar{y}(\bar{x} = 1, t) = 0$	$t \geq 0$	J003
Anfangsbedingungen für beliebige Auslenkungen Initial conditions for any deflections	$\bar{y}(\bar{x}, t = 0) \neq 0$	$0 < \bar{x} < 1$	J004
	$\dot{\bar{y}}(\bar{x}, t = 0) = 0$	$0 \leq \bar{x} \leq 1$	J005
	$\ddot{\bar{y}}(\bar{x}, t = 0) = 0$	$0 \leq \bar{x} \leq 1$	J006
Für eine Schwingungsberechnung sind Funktionen für Rand- und Anfangsbedingungen vorzugeben zur Bestimmung der Koeffizienten A_j und B_j	$\bar{y}(\bar{x}, t = 0) = e^{\beta \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cdot \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x})$		J007
	$\dot{\bar{y}}(\bar{x}, t = 0) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\underbrace{\sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x})}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(\beta \cdot A_j + \omega_j \cdot B_j)}_{=0} \right] = 0$		J008
Allgemein ist $\sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) \neq 0$, so dass $\beta \cdot A_j + \omega_j \cdot B_j = 0$ und $B_j = -A_j \cdot \frac{\beta}{\omega_j}$ ist. In general is $\cos(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) \neq 0$, so that $\beta \cdot A_j + j \cdot \omega_0 \cdot B_j = 0$ and must be $B_j = -A_j \cdot \frac{\beta}{\omega_j}$.			J009
	$\bar{y}(\bar{x}, t) = e^{\beta \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \cdot \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) \cdot \left(\cos(\omega_j \cdot t) - \frac{\beta}{\omega_j} \cdot \sin(\omega_j \cdot t) \right) \right]$		
Vereinfachung der Lösung Simplification of the solution	Für eine ausreichende Beschreibung der Auslenkung $\bar{y}(\bar{x}, t = 0)$ kann die Summe auf eine endliche Anzahl n beschränkt werden. Je mehr Glieder verwendet werden, desto genauer ist geometrische Erfassung der Auslenkung. For a sufficient description of the displacement $\bar{y}(\bar{x}, t = 0)$, the sum can be limited to a finite number n . The more terms that are used, the more accurate is geometric detection of the displacement.		J010
	$\bar{y}(\bar{x}, t = 0) \approx \sum_{j=1}^n A_j \cdot \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) = \bar{y}(\bar{x}, 0)$		J011
	Diese Summe stellt die Anfangsauslenkung ($t = 0$) dar. Die Koeffizienten A_j können wie die einer Fourier-Reihe mit Hilfe dieser Anfangsauslenkung bestimmt werden, wobei $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_j \dots \bar{y}_n$ bekannte Punkte / Stützstellen der Anfangsauslenkung sind. This sum represents the initial displacement ($t = 0$). The coefficients A_j can be determined as those of a Fourier series by means of this initial displacement, where $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_j \dots \bar{y}_n$ are known points / reference points of the initial displacement.		J012
Genäherte Schwingungsgleichung Approximated oscillation equation	$\bar{y}(\bar{x}, t) = e^{\beta \cdot t} \cdot \sum_{j=1}^n A_j \cdot \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}) \cdot \left(\cos(\omega_j \cdot t) - \frac{\beta}{\omega_j} \cdot \sin(\omega_j \cdot t) \right)$		J013
Näherungsgleichung für einzelne Punkte der Saite	Die Auslenkung \bar{y}_k an der Stelle \bar{x}_k • zum Zeitpunkt t_i		J14



<p>Approximation equation for individual points of the string</p>	<ul style="list-style-type: none"> in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen (Anfangsauslenkung $\bar{y}(t = 0)$) sowie Materialeigenschaften, Saitengeometrie und Dämpfung β und ω_j in Näherung mit der gewählten Anzahl der Amplituden A_j mit $j = 1 \dots n$. <p>The deflection \bar{y}_k at the point \bar{x}_k</p> <ul style="list-style-type: none"> at time t_i depending on the initial conditions (initial displacement $\bar{y}(t = 0)$) as well Material properties, string geometry and damping β and ω_j in approximation with the chosen number of amplitudes A_j with $j = 1 \dots n$. 	
	$\bar{y}_k(\bar{x}_k, t_i) = e^{\beta \cdot t_i} \cdot \sum_{j=1}^n A_j \cdot \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}_k) \cdot \left(\cos(\omega_j \cdot t_i) - \frac{\beta}{\omega_j} \cdot \sin(\omega_j \cdot t_i) \right)$	<p>J015</p> <p>J016</p>

		K000	
<p>Näherung der Anfangsauslenkung durch eine Fourier-Reihe</p>	<p>Die Vorgabe einer beliebigen Anfangsauslenkung ($\bar{y}(\bar{x}, t = 0)$) für die Berechnung kann durch eine Näherung dieser Anfangsauslenkung durch eine Fourier-Reihe erfolgen.</p> <p>The specification of any initial displacement $\bar{y}(\bar{x}, t = 0)$ for the calculation can be done by approximating this initial displacement by a Fourier series.</p>	K001	
<p>Ermittlung der Koeffizienten Determination of coefficients</p>	<p>Jede Teilschwingung hat eine Amplitude A_j, die von der Anfangsauslenkung abhängt und mit Hilfe der Anfangsauslenkung bestimmt werden kann.</p> <p>Each partial oscillation has an amplitude A_j, which depends on the initial deflection and can be determined with the aid of the initial deflection.</p>	K002	
<p>Diese Gleichung für $t = 0$ entspricht einer Fourier-Reihe mit n Stützstellen.</p>	$\bar{y}(\bar{x}, t = 0) = \sum_{j=1}^n A_j \cdot \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x})$	<p>This equation for $t = 0$ corresponds to a Fourier series with n supporting points (reference points)</p>	K002
	<p>Sind für $j = 1 \dots i \dots n$ Auslenkungen (Stützstellen) $\bar{y}(\bar{x}_i, t = 0)$ bekannt, können die Koeffizienten A_i ermittelt werden.</p> <p>The coefficients A_k can be determined, if the local deflections $\bar{y}(\bar{x}_j, t = 0)$ for $j = 1 \dots i \dots n$ are known.</p>	K003	
<p>Die entsprechenden Koeffizienten der Fourier-Reihe werden nach folgender Gleichung ermittelt.</p>	$A_j = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{y}(\bar{x}_i, t = 0) \cdot \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}_i)$ $A_j = \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot \sin(j \cdot \pi \cdot \bar{x}_j)$	<p>The corresponding coefficients of the Fourier series are determined according to the following equation.</p>	K004

<p>Allgemeines Beispiel für die Ermittlung der Koeffizienten für die Berücksichtigung (Vorgabe) von $n = 12$ Stützstellen y_j General Example for the determination of the coefficients for the consideration of $n = 12$ supporting points (reference points) y_j</p>														L001
$A_k = \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot \bar{x}_j)$						<p>Erfassung der Schwingung einer Saite nach Vorgabe der Anfangsauslenkung \bar{y}_j an $n = 12$ Stützstellen für 8 Zeitpunkte t_i Detection of the vibration of a string after specification of the initial displacement y_j at $n = 12$ supporting points for the time $t = 0$</p>								L002
<p>Festlegen der Ausgangsgrößen / initial sizes</p>						<p>Geometrie, Material, Dämpfung / Geometry, material, damping</p>								L003
<p>j</p>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$n=12$	$l=13$	L004
<p>$\bar{x}_j = x_j/l$</p>	0/12	1/12	2/12	3/12	4/12	5/12	6/12	7/12	8/12	9/12	10/12	11/12	12/12	L005
<p>$\bar{y}_j = y_j/l$</p>	$\bar{y}_1(\bar{x}_1)$	$\bar{y}_2(\bar{x}_2)$	$\bar{y}_3(\bar{x}_3)$	$\bar{y}_4(\bar{x}_4)$	$\bar{y}_5(\bar{x}_5)$	$\bar{y}_6(\bar{x}_6)$	$\bar{y}_7(\bar{x}_7)$	$\bar{y}_8(\bar{x}_8)$	$\bar{y}_9(\bar{x}_9)$	$\bar{y}_{10}(\bar{x}_{10})$	$\bar{y}_{11}(\bar{x}_{11})$	$\bar{y}_{12}(\bar{x}_{12})$	$\bar{y}_1(\bar{x}_1)$	L006
<p>Dreieck Triangle</p>	0 $\cdot 10^{-3}$	1/4 $\cdot 10^{-3}$	2/4 $\cdot 10^{-3}$	3/4 $\cdot 10^{-3}$	1 $\cdot 10^{-3}$	7/8 $\cdot 10^{-3}$	6/8 $\cdot 10^{-3}$	5/8 $\cdot 10^{-3}$	4/8 $\cdot 10^{-3}$	3/8 $\cdot 10^{-3}$	2/8 $\cdot 10^{-3}$	1/8 $\cdot 10^{-3}$	0 $\cdot 10^{-3}$	L007
	<p>Stützstelle Fourier-koeffizienten: $A_k = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n y_j \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x_j)$, $k = 1..n$ Faktor, $j = 1 \dots n$ Koeffizienten (Amplituden).</p>													L008
<p>$k = 1 \dots n$</p>	$A_k = \frac{2}{n} \cdot [\bar{y}_1 \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot \bar{x}_1) + \bar{y}_2 \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot \bar{x}_2) + \bar{y}_3 \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot \bar{x}_3) + \bar{y}_4 \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot \bar{x}_4) + \dots + \bar{y}_{12} \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot \bar{x}_{12})]$													L009
<p>$k = 1$</p>	$A_1 = \frac{2}{6} \cdot [\bar{y}_1 \cdot \sin(1 \cdot \pi \cdot \bar{x}_1) + \bar{y}_2 \cdot \sin(1 \cdot \pi \cdot \bar{x}_2) + \bar{y}_3 \cdot \sin(1 \cdot \pi \cdot \bar{x}_3) + \bar{y}_4 \cdot \sin(1 \cdot \pi \cdot \bar{x}_4) + \dots + \bar{y}_{12} \cdot \sin(1 \cdot \pi \cdot \bar{x}_{12})]$													L010
<p>$k = 2$</p>	$A_2 = \frac{2}{6} \cdot [\bar{y}_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_1) + \bar{y}_2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_2) + \bar{y}_3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_3) + \bar{y}_4 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_4) + \dots + \bar{y}_{12} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_{12})]$													L011
<p>$k = 3$</p>	$A_3 = \frac{2}{6} \cdot [\bar{y}_1 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot \bar{x}_1) + \bar{y}_2 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot \bar{x}_2) + \bar{y}_3 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot \bar{x}_3) + \bar{y}_4 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot \bar{x}_4) + \dots + \bar{y}_{12} \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot \bar{x}_{12})]$													L012
<p>$k = 4$</p>	$A_4 = \frac{2}{6} \cdot [\bar{y}_1 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot \bar{x}_1) + \bar{y}_2 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot \bar{x}_2) + \bar{y}_3 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot \bar{x}_3) + \bar{y}_4 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot \bar{x}_4) + \dots + \bar{y}_{12} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot \bar{x}_{12})]$													L013
<p>\vdots</p>	<p>\vdots</p>													L014
<p>$k = n = 12$</p>	$A_{12} = \frac{1}{6} \cdot [\bar{y}_1 \cdot \sin(12 \cdot \pi \cdot \bar{x}_1) + \bar{y}_2 \cdot \sin(12 \cdot \pi \cdot \bar{x}_2) + \bar{y}_3 \cdot \sin(12 \cdot \pi \cdot \bar{x}_3) + \bar{y}_4 \cdot \sin(12 \cdot \pi \cdot \bar{x}_4) + \dots + \bar{y}_{12} \cdot \sin(12 \cdot \pi \cdot \bar{x}_{12})]$													L015

	<p style="text-align: center;">Anfangsauslenkungen / Initial deflections</p>	<p style="text-align: right;">N001</p>	
		<p style="text-align: right;">N002</p>	
<p>Ergebnis mit 24 Stützstellen $\rho_S = 7850$, $\sigma = 1,27 \cdot 10^9$, $K_D = 0,001$, $K_B = 6,17 \cdot 10^{-6}$ Excel-Berechnungen sind auf Anfrage über www.jblatt.de erhältlich.</p>	<p>Result with 24 support points $\rho_S = 7850$, $\sigma = 1,27 \cdot 10^9$, $K_D = 0,001$, $K_B = 6,17 \cdot 10^{-6}$, Excel-Calculations are available on request via www.jblatt.de.</p>	<p style="text-align: right;">N003</p>	
<p>Trapezförmige Anfangsauslenkung Trapace initial deflection</p>			
	<p style="text-align: center;">Schwingung einer Saite über eine Schwingungsperiode dargestellt mit 24 Stützstellen y_j/y_{max}</p>	<p style="text-align: center;">Trapez-Schwingungsverlauf $y^*=f(x/l=0,5, t)$</p>	<p style="text-align: right;">N004</p>
<p>Sinusförmige Anfangsauslenkung initial iniatial deflection</p>			<p style="text-align: right;">N005</p>
	<p style="text-align: center;">Schwingung der Saite über eine Schwingungsperiode dargestellt mit 24 Stützstellen y_j/y_{max}</p>	<p style="text-align: center;">Sinus-Schwingungsverlauf $y^*=f(x/l=0,5, t)$</p>	<p style="text-align: right;">N006</p>
<p>Dreieckige Anfangsauslenkung triangular initial deflection</p>		<p style="text-align: right;">N007</p>	

	<p>Schwingung einer gezupften Saite über eine Schwingungsperiode dargestellt mit 24 Stützstellen y_j/y_{max}</p>	<p>Dreieck-Schwingungsverlauf $y^*_{max}=f(x/l, t)$, $y^*(x/l=0,5, t)$</p>	
			N008
			N009
<p>Amplituden $\frac{A_j}{y_{max}}$ [-]</p>			N010
<p>Trapezförmige Anfangsauslenkung Trapezoidal initial deflection</p>	<p>Sinusförmige Anfangsauslenkung Sinusoidal initial excursion</p>	<p>Dreieckförmige Auslenkung Triangular deflection</p>	N011
<p>Amplituden [-] bei trapezförmiger...</p>	<p>Amplituden [-] bei sinusförmiger...</p>	<p>Amplituden [-] bei dreieckförmiger...</p>	N012
			N013
			N014
			N015

<p>Kurze Einschätzung der Ergebnisse Assessment of results</p>		O000
<p>Die Lösung der Schwingungsgleichung ist plausibel nachvollziehbar dargestellt mit den Erkenntnissen:</p> <ul style="list-style-type: none"> Ein Beispiel zum Einschätzen des Aufwandes zur Lösung mit einer Anzahl der vorgegebener Stützstellen / Eigenfrequenzen von $n = 24$ zeigt, dass damit bereits eine akzeptable Genauigkeit erreicht werden kann. Die dabei verwendete Dreieckverteilung der Auslenkung zeigt die Brauchbarkeit einer Fourier-Reihenentwicklung. Die Verwendung einer dimensionslosen Gleichung ist von Vorteil, besonders bei der Darstellung und dem Vergleich der Ergebnisse. 	<p>The solution of the oscillation equation is plausibly traceable with the findings:</p> <ul style="list-style-type: none"> An example for estimating the effort to solve with a number of given support points / natural frequencies of $n = 24$ shows that this already an acceptable accuracy can be achieved. The triangular distribution of the deflection used here shows the usefulness of a Fourier series expansion. The use of a dimensionless equation is advantageous, especially in the presentation and comparison of the results. 	O001



<ul style="list-style-type: none"> • Ist die Dämpfungskonstante $D = 0$, entsteht eine ungedämpfte Schwingung (konstante Amplitude). • Die Differentialgleichungen können auch bezgl. der Zeit dimensionslos mit Hilfe der Frequenz ω_1 gemacht werden. • Die Ergebnisse zeigen kaum erkennbare Unterschiede in Schwingungsverlauf auf Grund der Ausgangswerte, die sich nur in der Anfangsauslenkung unterscheiden. Im Frequenzspektrum $A_j(\omega_j)$ sind Unterschiede erkennbar. • Berechnungen sind auf Anfrage über www.jblatt.de erhältlich. 	<ul style="list-style-type: none"> • If the damping constant $D = 0$, an undamped oscillation occurs (constant amplitude) • The differential equations can also be made dimensionless with respect to time using the frequency ω_1. • The results show barely recognizable differences in the course of oscillation due to the initial values, which differ only in the initial displacements. The frequency spectrum $A_j(\omega_j)$ shows differences. • Calculations are available on request via www.jblatt.de 	
		0002

