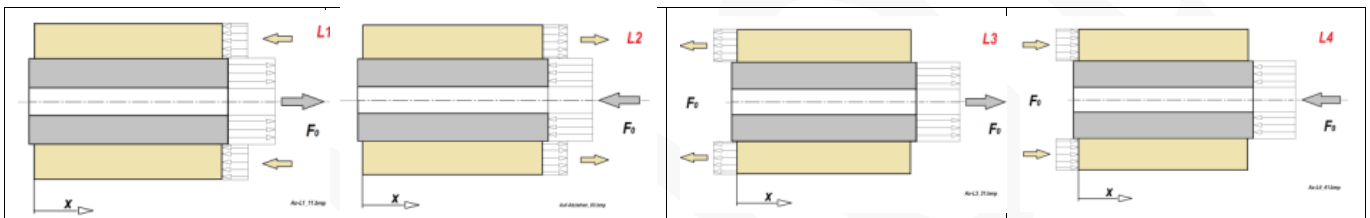


Grenze der axialen Kraftübertragung in einer Welle-Nabe-Verbindung mit zylindrischer Pressfuge

Limit of the axial force transfer in a single lap adhesive bond with cylindrical joint

Eine einfache, theoretische Betrachtung
A simple theoretical consideration



© Klaus-Jürgen Bladt

Rostock, den 27.07. 2017

Contact: www.jblatt.de

Under construction

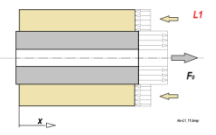
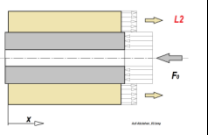
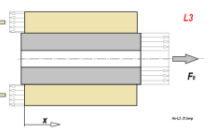
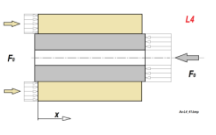
Die Dokumentation wurde mit bestem Wissen und Gewissen erarbeitet. Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle erhebt die Dokumentation keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit. Unbeabsichtigte Fehler können auftreten. Hinweise auf inhaltliche Verbesserungen und Diskussionen sind erwünscht. Für die Vervielfältigung des Dokumentes und die Übernahme von Auszügen ist die Zustimmung des Autors erforderlich. Für den Inhalt verlinkter Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

The paper was prepared to best of one's knowledge. The paper makes no claim to be complete and correct in spite of the careful control. Hints for content improvements and discussions are welcome. Hints for content improvements and discussions are welcome. The duplication of the document and the taking over abridges require the approval of the author. The linked WEB-Site operators are responsible for contents of their own sites.

*Zwei Dinge sind zu unserer Arbeit nötig: unermüdliche Ausdauer und die Bereitschaft, etwas, in das man viel Arbeit gesteckt hat, wieder wegzuworfen. A. E.
Two things are necessary for our work: indefatigable endurance and the willingness to throw away something that has been put into a lot of work. A. E.*



	Grenze der axialen Kraftübertragung in einer Welle-Nabe-Verbindung mit zylindrischer Pressfuge <i>Limit of axial force transmission in a shaft-hub connection with a cylindrical press joint</i>	00.00
1. Zielstellung	Goal setting	
Allgemeines Pressfuge in einer kraftschlüssigen Welle-Nabe-Verbindung General Press joint in a force-locked shaft-hub connection	<ul style="list-style-type: none"> ○ Zylindrische Pressverbände werden allgemein zur Übertragung von Momenten genutzt, wobei auch axiale Kräfte gewollt oder ungewollt auftreten können und / oder übertragen werden müssen. ○ Das Fügen dieser Verbindung erfolgt durch Schrumpfen, Aufweiten oder durch <u>axiales Aufpressen</u>. Das <u>Lösen</u> erfolgt in vielen Fällen durch <u>axiales Pressen / Ziehen</u>, wenn nicht besondere Maßnahmen (teilweise Aufweitung durch Öldruck) dafür vorgesehen sind. ○ Grenzfall für eine axiale Kraftübertragung – die Verschiebung der Teile gegeneinander - ist von besonderem Interesse. <hr/> <ul style="list-style-type: none"> ○ Cylindrical press joints are generally used for the transmission of moments, whereby axial forces can also occur intentionally or unwantedly and / or have to be transmitted. ○ Joining this connection is by shrinking, expanding or by <u>axial pressing</u>. <u>Loosening</u> is carried out in many cases by <u>axial pressing/ drawing</u> off, unless special measures (partial expansion by oil pressure) are provided for this purpose. ○ The limiting case for an axial force transmission is of particular interest. 	01.01
Zielstellung Goal	<ul style="list-style-type: none"> ○ Auf der Webseite www.jbladt.de wurde bereits einiges über Pressverbände vorgestellt. Die Betrachtung des Einfluss von Axialkräften auf eine Pressverbindung soll diese Ausführungen ergänzen. ○ Gegenstand der Betrachtungen soll die Ermittlung der Kräfte zum Verschieben der gefügten Teile gegeneinander in axialer Richtung x sein. Der Weg dorthin soll ausführlich dargestellt werden. ○ Die wesentlichen 4 Lastfälle sollen hier beschrieben werden. ○ Die Vorgehensweise soll zu einer dimensionslosen Darstellung der Ergebnisse führen. <hr/> <ul style="list-style-type: none"> ○ On the website www.jbladt.de already a lot about press connections was presented. The consideration of the influence of axial forces on a press connection is intended to supplement these embodiments. ○ The object of the considerations is to determine the force for displacing the joined parts relative to another in the longitudinal direction x. The way to get there is to be described in detail. ○ The essential general 4 load cases are described here. ○ The approach should lead to a dimensionless presentation of the results. 	01.02
Bemerkungen Remarks	<ul style="list-style-type: none"> ○ Anregung zu dieser Betrachtung kam aus der Literatur [1], [2]. Die dort dargestellte Lösung ist im Detail nicht umfassend nachvollziehbar, wenn davon ausgegangen wird, dass es vier (4) grundsätzliche Varianten für den Kraftangriff zur Verschiebung der Teile gegeneinander gibt. ○ Die Betrachtungen werden mit einem einfachen Berechnungsmodell durchgeführt. Die Ergebnisse haben daher hauptsächlich qualitativen, also quantitativ eingeschränkten Charakter. Sie sind geeignet, konstruktive Schlussfolgerungen zu ziehen. ○ Bei den folgenden Betrachtungen wird nachvollziehbar Schritt für Schritt vorgegangen. Es werden Wiederholungen auftreten, um Fehler zu vermeiden. Die einzelnen Rechenschritte und deren Folge sind das Ergebnis einer kontinuierlichen Abwicklung der Berechnung. Sicher kann man den Berechnungsablauf kürzen, methodisch besser bzw. einfacher gestalten. <hr/> <ul style="list-style-type: none"> ○ The stimulus to this consideration came from the literature [1], [2]. The solution shown there is not fully comprehensible in detail if four (4) basic variants exist for the force application for the displacement of the parts with respect to one another. ○ The considerations are carried out with a simple calculation model. The results therefore have mainly qualitative, ie quantitatively limited character.. They are capable of drawing constructive conclusions ○ The following considerations are followed step by step. Repeats will occur to avoid errors. The individual calculation steps and their consequences are the result of a continuous processing of the calculation. The calculation process can be shortened, improved or simplified. 	01.03
		01.04

Skizzen zur Problemläuterung / Sketches for the explanation of the problem					02.00
Die wesentlichen 4 Lastfälle The essential 4 load cases	Lastfall 1	Lastfall 2	Lastfall 3	Lastfall 4	02.01
Randbedingungen Boundary conditions					02.02
Kraftrichtung im Außenteil (A) Direction of force in the outer part (A)	Druckkraft / pressure load { $-\bar{F}(\bar{x})$ }	Zugkraft / tensile load { $+\bar{F}(\bar{x})$ }	Zugkraft / tensile load { $-\bar{F}(\bar{x})$ }	Druckkraft / pressure load { $+\bar{F}(\bar{x})$ }	02.03
Kraftrichtung im Innenteil (I) Direction of force in the inner part (I)	Zugkraft / tensile Load { $+\bar{F}(\bar{x})$ }	Druckkraft / pressure load { $-\bar{F}(\bar{x})$ }	Zugkraft / tensile load { $+\bar{F}(\bar{x})$ }	Druckkraft / pressure load { $-\bar{F}(\bar{x})$ }	02.04
					02.05

2. Formelzeichen Symbols	Nur die wesentlichen Formelzeichen werden hier angegeben. Spezifizierungen ergeben sich aus den folgenden Ausführungen. Only the essential formulas are given here. Specifications are given in the following explanations.		03.00
			03.01
Geometrie	Symbol	Geometry	03.02
Durchmesser	d [mm]	Diameter	03.03
Radius	r [mm]	Radius	03.04
Länge	l [mm]	length	03.05
Längenkoordinate	x [mm], \bar{x} [-], \bar{z} [-]	Coordinate of length	03.06
Fläche	A [mm ²]	Area	03.07
Übermaß / radiale Deformation	Z [mm]	Oversize / radial deformation	03.08
Durchmesserquotient	Q [-]	Quotient of diameters	03.09
			03.10
Material		Material	03.11
Elastizitätsmodul	E [N/mm ²]	Modul of elasticity	03.12
Querkontraktionszahl	ν [-] < 0,5	Poisson's ratio	03.13
Reibungskoeffizient / Fuge	μ [-]	Friction coefficient	03.14
			03.15
Beanspruchung			03.16
Kraft in Längsrichtung (x)	F [N], \bar{F} [-]	Force	03.17
Pressung in der Fuge mit Axialkräften	$p(x)$ [N/mm ²], \bar{p} [-]	Pressure in the joint with axial forces	03.18
Bekannte, konstruktiv festgelegte Pressung ohne Axialkräfte	p_0 $\left[\frac{N}{mm^2}\right] = const$, \bar{p}_0 [-]	Known, designally fixed pressure without axial forces	03.19
Dimensionslose Größe	Ξ	Dimensionless sizes	03.20
			03.21
Zusammenfassende Koeffizienten von Material- und Geometrieigenschaften		Summarizing Coefficients of characteristics of material and Geometry	03.22
Wird im Berechnungsablauf definiert	m [mm ⁻²]	Is defined in the calculation process	03.23
○	k [-]	○	03.24
○	A	○	03.25
○	B	○	03.26
○	$\alpha = k_A + k_I$	○	03.27
			03.28
Integrationskonstanten	C	Integration constants	03.29
			03.30
			03.31
Indices		Indices	03.32
außen	A, a	Outside	03.33
innen	I, i	Inside	03.34
Linker Rand: $x = 0, \bar{x} = 0$	l	Left border: $x = 0, \bar{x} = 0$	03.35
Rechter Rand: $x = l, \bar{x} = 0$	r	Right border: $x = l, \bar{x} = 1$	03.36
		axial force at axial front side	03.37
Fuge	F	Joint	03.38
Lastfall	L1, L2, L3, L4	Load case	03.39
Reibung (für Kraft, Fläche)	μ	Friction (for force, area)	03.40
			03.41

3. Ermittlung des Kräftegleichgewichtes / Determination of the force equilibrium			04.00
	Außenteil / Hülse / Kupplung / Ring / ... Outer part / sleeve / coupling / ring / ...	Innenteil / Welle Inner part / shaft	04.01
<p>Zusammenhang zwischen radialer und axialer Beanspruchung Relationship between radial and axial stress</p> <p>Betrachtung der Beanspruchung eines differentiellen Scheibenelementes am Pressfugendurchmesser beim Verschieben gegeneinander</p> <p>Consideration of the stress on a differential disc element at the compression joint diameter during displacement relative to one another</p>			04.02
<p>Kräftegleichgewicht an einem differentiellen Scheibenelement bzw. Schichtelement Balance of power On a differential disk element</p>	$F_A(x) + \frac{dF_A(x)}{dx} dx - F_A(x) - \mu \cdot p(x) \cdot dA_F = 0$	$F_I(x) + \frac{dF_I(x)}{dx} dx - F_I(x) - \mu \cdot p(x) \cdot dA_F = 0$	04.03
	$\frac{dF_A(x)}{dx} \cdot dx - \mu \cdot p(x) \cdot \pi \cdot d_F \cdot dx = 0$	$\frac{dF_I(x)}{dx} \cdot dx - \mu \cdot p(x) \cdot \pi \cdot d_F \cdot dx = 0$	04.04
	$\frac{dF_A(x)}{dx} - \mu \cdot p(x) \cdot \pi \cdot d_F = 0$	$\frac{dF_I(x)}{dx} - \mu \cdot p(x) \cdot \pi \cdot d_F = 0$	04.05
	$\frac{dF_A(x)}{p_0 \cdot dx/l} - \frac{p(x)}{p_0} \cdot \frac{\mu \cdot \pi \cdot d_F \cdot l}{A_\mu} = 0$	$\frac{dF_I(x)}{p_0 \cdot dx/l} - \frac{p(x)}{p_0} \cdot \frac{\mu \cdot \pi \cdot d_F \cdot l}{A_\mu} = 0$	04.06
Dimensionloser Druck Dimensionless pressure	$\frac{d\bar{F}_A(\bar{x})}{d\bar{x}} = \bar{p}(\bar{x})$	$\frac{d\bar{F}_I(\bar{x})}{d\bar{x}} = \bar{p}(\bar{x})$	04.07
			04.08

4. Allgemeine Festigkeitslehre General / [3]		General principles of strength	05.00
<p>Hookesches Gesetz Zusammenhang Materialkennwerte, Dehnung, Beanspruchung [3]</p>	$E \cdot \varepsilon_t = \sigma_t - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_x)$	Hooke's law Context Material characteristics, strain, stress [3]	05.01
Tangentiale Dehnung infolge sämtlicher Normalspannungen	$\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_x)]$	Tangential elongation due to all normal stresses	05.02
Durchmesseränderung infolge sämtlicher Normalspannungen	$E \cdot \varepsilon_t = E \cdot \frac{\pi \cdot \Delta d}{\pi \cdot d} = E \cdot \frac{\Delta d}{d} = [\sigma_t - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_x)]$	Change of diameter due to all normal stresses	05.03
Materialkennwerte [Dubbel]: E-Modul Poisson'sche-Zahl	$E \left[\frac{N}{mm^2} \right], \quad E_{Stahl} = 210.000 \frac{N}{mm^2}$ $\nu = \frac{1}{m} [-], \quad \nu_{Stahl} = \frac{1}{m_{Stahl}} \approx 0,3$	Material characteristics E-Modulus Poisson's number	05.04
			05.05

5. Angewandte Festigkeitslehre [3]		Applied strength	06.00
Grundlage zur Spannungsberechnung	Unendlich langer Hohlzylinder / Infinitely long hollow cylinder	Basis for calculation of stress	06.01
Tangentialspannung durch Innen- und Außendruck	$\sigma_t = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left[p_i(x) \cdot \left(1 + \frac{r_a^2}{r_i^2} \right) - p_a(x) \cdot \frac{r_a^2}{r_i^2} \cdot \left(1 + \frac{r_i^2}{r_a^2} \right) \right]$	Tangential stress due to internal and external pressure	06.02
Radialspannung durch Innen- und Außendruck	$\sigma_r = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left[p_i(x) \cdot \left(1 - \frac{r_a^2}{r_i^2} \right) + p_a(x) \cdot \left(\frac{r_a^2}{r_i^2} - \frac{r_i^2}{r_a^2} \right) \right]$	radial stress due to internal and external pressure	06.03
Axialspannung durch Längsbelastung	$\sigma_x = \frac{F(x)}{A} = \frac{F(x)}{\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)}$	axial stress due to tensile longitudinal loading	06.04
			06.05



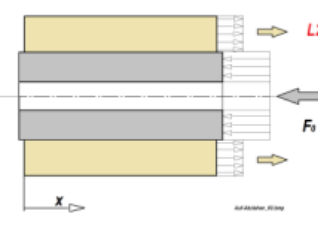
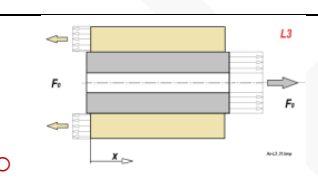
6. Pressung in der Fuge		Pressure in the joint		07.00
		Außenteil	Innenteil	07.01
Deformation am Fugendurchmesser Derformation on the diameter of joint	$Z_A = \Delta d_{FA} = \frac{d_F}{E_A} [\sigma_{At} - \nu_A \cdot (\sigma_{Ar} \pm \sigma_{Ax})]$	$Z_I = \Delta d_{FI} = \frac{d_F}{E_I} [\sigma_{It} - \nu_I \cdot (\sigma_{Ir} \pm \sigma_{Ix})]$		07.02
Bedingungen Conditions	$p_{Aa} = 0, p_{Ai} = p(x)$	$p_{Ia} = p(x), p_{Ii} = 0$		07.03
Geometrie Geometry	$d = d_F, Q_A = d_F/d_A$	$Q_I = d_I/d_F$		07.04
Tangentialspannung Tangential stress	$\sigma_{tA} = \frac{1 + Q_A^2}{1 - Q_A^2} \cdot p(x)$	$\sigma_{tI} = -\frac{1 + Q_I^2}{1 - Q_I^2} \cdot p(x)$		07.05
Radialspannung Radial stress	$\sigma_{rA} = -p(x)$	$\sigma_{rI} = -p(x)$		07.06
Axialspannung Axial stress	$\sigma_{xA} = \pm \frac{F_A(x)}{A_A} = \pm \frac{4 \cdot F_A(x)}{\pi \cdot d_A^2 \cdot (r_a^2 - r_i^2)}$	$\sigma_{xI} = \pm \frac{F_I(x)}{A_I} = \pm \frac{4 \cdot F_I(x)}{\pi \cdot d_F^2 \cdot (1 - Q_I^2)}$		07.07
Übermaß Oversize	$Z_A = \frac{d_F}{E_A} \cdot \left[\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} \cdot p(x) - \nu_A \cdot (-p(x) + \frac{F_A(x)}{A_A}) \right]$	$Z_I = \frac{d_F}{E_I} \cdot \left[-\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} \cdot p(x) - \nu_I \cdot (-p(x) + \frac{F_I(x)}{A_I}) \right]$		07.08
				07.09
Gesamtübermaß Complete oversize	$Z(x) = Z_A(x) - Z_I(x)$			07.10
	$Z(x) = \frac{d_F}{E_A} \cdot \left[\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} \cdot p(x) + \nu_A \cdot (p(x) \pm \frac{F_A(x)}{A_A}) \right] - \frac{d_F}{E_I} \cdot \left[-\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} \cdot p(x) - \nu_I \cdot (-p(x) \pm \frac{F_I(x)}{A_I}) \right]$			07.11
Veränderliches Übermaß in der Fuge, wenn Axialkräfte auftreten Variable oversize in the joint when axial forces occur	$Z(x) = p(x) \cdot \left[\frac{d_F}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{d_F}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right] \pm \frac{d_F}{E_A} \cdot \frac{F_A(x)}{A_A} \pm \frac{d_F}{E_I} \cdot \frac{F_I(x)}{A_I}$			07.12
	$p(x) = \frac{Z(x)}{\left[\frac{d_F}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{d_F}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]} \pm \frac{\frac{d_F \cdot F_A(x)}{E_A \cdot A_A}}{\left[\frac{d_F}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{d_F}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]} \pm \frac{\frac{d_F \cdot F_I(x)}{E_I \cdot A_I}}{\left[\frac{d_F}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{d_F}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]}$ $\approx p_0$			07.13
Wichtig für das weitere Vorgehen Important for the further procedure	In der Konstruktionsphase einer Welle-Nabe-Verbindung wird das erforderliche Übermaß Z_0 anhand der für die Momentübertragung benötigten Pressung ermittelt. Axialkräfte, die zu einer Verschiebungen führen, sind nicht vorhanden ($F_A(x) = 0, F_I(x) = 0$). Z_0 bzw. p_0 sind also bekannte konstante Größen. In the design phase of a shaft-hub connection, the required oversize Z_0 is determined on the basis of the pressure required for torque transmission. Axial forces, which lead to a displacement, are not present ($F_A(x) = 0, F_I(x) = 0$). Z_0 and p_0 are therefore known constant sizes.			07.14
Konstantes Übermaß für die Funktion (Torsionsmomentübertragung ohne Axialkräfte) Constant oversize for the function (torsion moment transfer without axial forces)	$Z_0 = p_0 \cdot \left[\frac{d_F}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{d_F}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right] = const$			07.15
Konstante Pressung für die Funktion der Torsionsmomentübertragung ohne Axialkräfte Constant oversize for the function of the torsion moment transfer without axial forces	$p_0 = \frac{Z_0}{\left[\frac{d_F}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{d_F}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]} = const$			07.16
Annahme Assumption	$p_0 \approx \frac{Z(x)}{\left[\frac{d_F}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{d_F}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]}$			07.17
Vereinfachte, zu lösende Gleichung Simplified equation to be solved	$p(x) = p_0 \pm \frac{\frac{d_F \cdot F_A(x)}{E_A \cdot A_A}}{\left[\frac{d_F}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{d_F}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]} \pm \frac{\frac{d_F \cdot F_I(x)}{E_I \cdot A_I}}{\left[\frac{d_F}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{d_F}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]}$			07.18
				07.19
Allgemeine dimensionsbehaftete Gleichung General dimension-related equation	$p(x) = p_0 \pm \frac{\nu_A}{E_A \cdot A_A \cdot \left[\frac{1}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{1}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]} \cdot F_A(x) \pm \frac{\nu_I}{E_I \cdot A_I \cdot \left[\frac{1}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{1}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]} \cdot F_I(x)$			07.20
Übergang zur dimensionslosen Gleichung	$\frac{p(x)}{p_0} = 1 \pm \frac{A_{\mu} \cdot \nu_A}{E_A \cdot A_A \cdot \left[\frac{1}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{1}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]} \cdot \frac{F_A(x)}{A_{\mu} \cdot p_0} \pm \frac{A_{\mu} \cdot \nu_I}{E_I \cdot A_I \cdot \left[\frac{1}{E_A} \cdot \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + \nu_A \right) + \frac{1}{E_I} \cdot \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - \nu_I \right) \right]} \cdot \frac{F_I(x)}{A_{\mu} \cdot p_0}$			07.21

Transition to the dimensionless equation $\bar{x} = \frac{x}{l}$	$\bar{p}(x) = 1 \pm \frac{A_{\mu} \cdot v_A}{E_A \cdot A_A \left[\frac{1}{E_A} \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + v_A \right) + \frac{1}{E_I} \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - v_I \right) \right]} \cdot \bar{F}_A(x) \pm \frac{A_{\mu} \cdot v_I}{E_I \cdot A_I \left[\frac{1}{E_A} \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + v_A \right) + \frac{1}{E_I} \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - v_I \right) \right]} \cdot \bar{F}_I(x)$	07.22
	$\bar{p}(\bar{x}) = 1 \pm \frac{A_{\mu} \cdot v_A}{E_A \cdot A_A \left[\frac{1}{E_A} \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + v_A \right) + \frac{1}{E_I} \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - v_I \right) \right]} \cdot \bar{F}_A(\bar{x}) \pm \frac{A_{\mu} \cdot v_I}{E_I \cdot A_I \left[\frac{1}{E_A} \left(\frac{1+Q_A^2}{1-Q_A^2} + v_A \right) + \frac{1}{E_I} \left(\frac{1+Q_I^2}{1-Q_I^2} - v_I \right) \right]} \cdot \bar{F}_I(\bar{x})$	07.23
Vereinfachte, zu lösende dimensionslose Gleichung Simplified dimensionless equation to be solved	$\bar{p}(\bar{x}) = 1 \pm k_A \cdot \bar{F}_A(\bar{x}) \pm k_I \cdot \bar{F}_I(\bar{x}) \quad [-]$	07.24
		07.25

7. Einschätzung Assessment	Auswirkungen der axialen Randbedingungen / der Belastung auf die radiale Verformung Effects of the axial boundary conditions / the axial load on the radial deformation		08.00
Zylinder unter axialer Belastung (x-Richtung) Cylinder under axial load (x-direction)	Axiale Druckbelastung / axial pressure load	Axiale Zugbelastung / axial tensile load	08.01
Verformung der Durchmesser Deformation of diameters	Innen- und Außendurchmesser vergrößern sich Internal and external diameters increase	Innen- und Außendurchmesser verkleinern sich Internal and external diameters are reduced	08.02
Wirkung auf das Innenteil Effect on the inner part	Verringerung der Pressung in der Fuge PressuReduction of pressing	Vergrößerung der Pressung in der Fuge Increase of the pressing	08.03
Wirkung auf das Außenteil Effect on the outer part	Vergrößerung der Pressung Increase of the pressing in the joint	Verringerung der Pressung Reduction of pressing in the joint	08.04
Achtung! Note!	Richtung und Angriffspunkt der wirkenden Kraft bestimmen die radiale Deformationsrichtung. Entscheidend ist, ob eine Zug- oder Druckbeanspruchung im Bauteil entsteht! Direction and point of application of the acting force determine the radial direction of deformation. The decisive factor is whether there is a tensile or compressive load in the component!		08.05

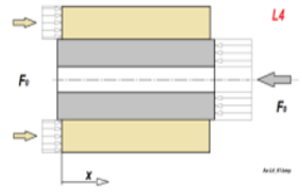
8. Betrachtung der Lastfälle L1, L2, L3, L4	Consideration of the load cases L1, L2, L3, L4	9.00
		9.01

Allgemeine dimensionslose Gleichungen General dimensionless equations	$\bar{p}(\bar{x}) = 1 \pm k_A \cdot \bar{F}_A(\bar{x}) \pm k_I \cdot \bar{F}_I(\bar{x})$	$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$	$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$	10.00 (04.08)		
Lastfall L1 Load case L1	$\bar{F}_A(\bar{x}) = -\bar{F}(x) \quad , \quad \bar{F}_I(\bar{x}) = +\bar{F}(x)$ $\bar{p}(\bar{x}) = 1 - k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) - k_I \cdot \bar{F}(\bar{x})$ $\bar{p}(\bar{x}) = 1 - (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$ $\frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} + (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) - 1 = 0$ $\bar{F}(\bar{x}) = - \frac{e^{-(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$ $\bar{F}_{L1A}(\bar{x}) = + \frac{e^{-(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$ $\bar{F}_{L1I}(\bar{x}) = - \frac{e^{-(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$	Substitution: $f(\bar{x}) = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) - 1$ $\bar{F}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) + 1}{(k_A + k_I)}$ $\frac{\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{1}{(k_A+k_I)} \cdot \frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}}$ $0 = \frac{1}{(k_A+k_I)} \cdot \frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}} + f(\bar{x})$ $\frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}} = -(k_A + k_I) f(\bar{x})$ Lösung: $\ln f(\bar{x}) = -(k_A + k_I) \cdot \bar{x} + C^*$ $f(\bar{x}) = C \cdot e^{-(k_A+k_I)\bar{x}}$ $\bar{F}(\bar{x}) = \frac{C \cdot e^{-(k_A+k_I)\bar{x}} + 1}{(k_A+k_I)}$ $\bar{F}(\bar{x} = 0) = 0 \quad \leadsto \quad C = -1$		09.04		
Zusammenfassung L1 Summary L1	Kraft Load	Kraftangriff Application of force	Belastungsart Load type	Richtung Direction	Wirkung effect	09.05
	$\bar{F}_{L1A}(\bar{x}) = + \frac{e^{-(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$	$x = 1$	Druck pressure	negativ (-)	Reduziert Pressung Reduction of Pressure	09.07
	$\bar{F}_{L1I}(\bar{x}) = - \frac{e^{-(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$	$x = 1$	Zug Tensile	positiv (+)	Reduziert Pressung Reduction of Pressure	0..08
	$\bar{p}_{L1}(\bar{x}) = e^{-(k_A+k_I)\bar{x}}$					09.09
						09.10

					10.00
Allgemeine dimensionslose Gleichungen General dimensionless equations	$\bar{p}(\bar{x}) = 1 \pm k_A \cdot \bar{F}_A(\bar{x}) \pm k_I \cdot \bar{F}_I(\bar{x})$	$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$	$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$		10.01
					10.02
Lastfall L2 Load case L2	 $\bar{F}_{L2A}(\bar{x}) = +\bar{F}(x) \quad , \quad \bar{F}_I(\bar{x}) = -\bar{F}(x)$ $\bar{p}_{L2}(\bar{x}) = 1 + k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) + k_I \cdot \bar{F}(\bar{x})$ $\bar{p}_{L2}(\bar{x}) = 1 + (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$ $\frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} - (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) - 1 = 0$ $\bar{F}(\bar{x}) = \frac{e^{(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$ $\bar{F}_{L2A}(\bar{x}) = + \frac{e^{(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$ $\bar{F}_{L2I}(\bar{x}) = - \frac{e^{(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$	Substitution: $f(\bar{x}) = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) + 1$ $\bar{F}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - 1}{(k_A + k_I)}$ $\frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = + \frac{1}{(k_A+k_I)} \cdot \frac{df(\bar{x})}{d\bar{x}}$ $0 = \frac{1}{(k_A+k_I)} \cdot \frac{df(\bar{x})}{d\bar{x}} - f(\bar{x})$ $\frac{df(\bar{x})}{d\bar{x}} = (k_A + k_I) f(\bar{x})$ Lösung: $\ln f(\bar{x}) = (k_A + k_I) \cdot \bar{x} + C^*$ $f(\bar{x}) = C \cdot e^{(k_A+k_I)\bar{x}}$ $\bar{F}(\bar{x}) = \frac{C \cdot e^{(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A + k_I)}$ $\bar{F}(\bar{x} = 0) = 0 \quad \leadsto \quad C = +1$		10.03	
					10.04
Zusammenfassung L2 Summary L2	Kraft Load	Angriff Application of force	Belastungsart Load type	Richtung Direction	Wirkung effect
	$\bar{F}_{L2A}(\bar{x}) = + \frac{e^{(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$	$x = 1$	Zug Tensile	positiv (+)	verstärkt Increasing of Pressure
	$\bar{F}_{L2I}(\bar{x}) = - \frac{e^{(k_A+k_I)\bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$	$x = 1$	Druck Pressure	negativ (-)	verstärkt increasing of pressure
	$\bar{p}_{L2}(\bar{x}) = e^{(k_A+k_I)\bar{x}}$				
					10.07
					11.00
Allgemeine dimensionslose Gleichungen General dimensionless equations	$\bar{p}(\bar{x}) = 1 \pm k_A \cdot \bar{F}_A(\bar{x}) \pm k_I \cdot \bar{F}_I(\bar{x})$	$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$	$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$		11.01
					11.02
Lastfall L3 Load case L3	Zwei Gleichungen auf Grund von Symmetrie und Spiegelung von $\bar{F}_A(\bar{x})$ und $\bar{F}_I(\bar{x})$ Two equations on the basis of symmetry and reflection of $\bar{F}_A(\bar{x})$ und $\bar{F}_I(\bar{x})$ ($y(x), x = const$)				11.03
	$\bar{F}_{L3A}(\bar{x}) = +\bar{F}(\bar{x}) \quad , \quad \bar{F}_{L3I}(\bar{x}) = -\bar{F}(1 - \bar{x})$ Vorzeichen und Wirkung: Außen \rightarrow Zug (+) $\rightarrow +F(x)$ \leftarrow Vergrößerung der Pressung Innen \rightarrow Zug (-) $\rightarrow -F(1 - x)$ \leftarrow Verringerung der Pressung				11.04.
Pressung, die innen auf das Außenteil wirkt Pressure, which acts inside of the outer part	$\bar{p}_{L3}(\bar{x}) = +1 + k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) - k_I \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) = + \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = - \frac{d\bar{F}(1-x)}{d(1-x)}$ $\bar{F}(\bar{x}) = - \frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(1-x)}{d(1-x)}$				11.05
Pressung, die außen auf das Innenteil wirkt Pressure, which acts outside of the inner part	$-\bar{p}_{L3}(1 - \bar{x}) = -1 + k_A \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - k_I \cdot \bar{F}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(1-x)}{d(1-x)} = - \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$ $\bar{F}(1 - \bar{x}) = + \frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$				11.06
					11.07
Hinweis Note	<ul style="list-style-type: none"> Beide Gleichungen sind gekoppelt / both equations are coupled Entflechtung der Gleichung zur Ermittlung der Pressungsverteilung im Außenteil demerging of the equation for the determination of the distribution of pressure in the outer part Beachtung der Krafrichtung / Observing the direction of force 				11.08
					11.09
Pressung, die innen auf das Außenteil wirkt	Pressure, which acts inside of the outer part				11.10

Ermittlung der zu lösenden Differentialgleichung Determination of the differential equation to be solved	$+1 + k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) - k_I \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \leftarrow \bar{F}(1 - \bar{x}) = +\frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$				11.11 (+11.05)	
	$+1 + k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) - k_I \cdot \left(+\frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} \right) + \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0$				11.12	
	$+k_A \cdot \left(1 - \frac{k_I^2}{k_A^2} \right) \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) + \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0$				11.13	
	$-k_A \cdot \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \left(1 + \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) + \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0$				11.14	
	$-k_A \cdot \left(1 + \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \bar{F}(\bar{x}) + 1 + \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0$				11.15	
Zu lösenden Differentialgleichung Differential equation to be solved	$+ \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} - (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) + 1 = 0$				11.16	
	Substitution / Substitution:		Lösung / Solution:		11.17	
	$f(\bar{x}) = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) - 1$ $\frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{1}{(k_A + k_I)} \cdot \frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}}$ $\frac{1}{(k_A + k_I)} \cdot \frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}} - f(\bar{x}) = 0$ $\frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}} = (k_A + k_I)$ $\ln f(x) = (k_A + k_I) \cdot \bar{x} + C^*$ $f(\bar{x}) = C_A \cdot e^{+(k_A + k_I) \cdot \bar{x}} = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) - 1$		$\bar{F}(\bar{x}) = \frac{C_A \cdot e^{+(k_A + k_I) \cdot \bar{x}} + 1}{(k_A + k_I)}$ $\bar{F}(\bar{x} = 1) = \frac{C_A \cdot e^{+(k_A + k_I) \cdot 1} + 1}{(k_A + k_I)} = 0$ $\leadsto C_A = -\frac{1}{e^{+(k_A + k_I)}}$ $\bar{F}(\bar{x}) = -\frac{e^{-(k_A + k_I) \cdot (1 - \bar{x})} - 1}{(k_A + k_I)}$ $\bar{F}_A(\bar{x}) = \bar{F}(\bar{x})$ $\bar{F}_I(\bar{x}) = -\frac{e^{-(k_A + k_I) \cdot (1 - \bar{x})} - 1}{(k_A + k_I)}$		11.18	
					11.19	
Pressung, die außen auf das Innenteil wirkt	Pressure, which acts outside of the inner part				11.20	
Ermittlung der zu lösenden Differentialgleichung Determination of the differential equation to be solved	$\bar{p}_{L3}(\bar{x}) = -1 + k_A \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - k_I \cdot \bar{F}(\bar{x}) = + \frac{d\bar{F}(1 - \bar{x})}{d(1 - \bar{x})} \leftarrow \bar{F}(\bar{x}) = -\frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(1 - \bar{x})}{d(1 - \bar{x})}$				11.21 (+11.11)	
	$-1 + k_A \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - k_I \cdot \left(-\frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(1 - \bar{x})}{d(1 - \bar{x})} \right) - \frac{d\bar{F}(1 - \bar{x})}{d(1 - \bar{x})} = 0$				11.22	
	$-\left(1 + \frac{k_I}{k_A} \right) + k_A \cdot \left(1 - \frac{k_I^2}{k_A^2} \right) \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \frac{d\bar{F}(1 - \bar{x})}{d(1 - \bar{x})} = 0$				11.23	
	$\bar{z} = 1 - \bar{x}$				11.24	
	$+k_A \cdot \left(1 + \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \bar{F}(\bar{z}) - \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) - \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{z})}{d(\bar{z})} = 0$				11.25	
Zu lösenden Differentialgleichung Differential equation to be solved	$-\frac{d\bar{F}(\bar{z})}{d(\bar{z})} + (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{z}) - 1 = 0$				11.26	
	Substitution:		Lösung / Solution:		11.27	
	$f(\bar{z}) = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{z}) - 1$ $\frac{f(\bar{z})}{d\bar{z}} = \frac{1}{(k_A + k_I)} \cdot \frac{f(\bar{z})}{d\bar{z}}$ $\frac{1}{(k_A + k_I)} \cdot \frac{f(\bar{z})}{d\bar{z}} + f(\bar{z}) = 0$ $\frac{f(\bar{z})}{d\bar{z}} = -(k_A + k_I)$ $\ln f(\bar{z}) = -(k_A + k_I) \cdot \bar{z} + C^*$ $f(\bar{z}) = C_A \cdot e^{-(k_A + k_I) \cdot \bar{z}} = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{z}) - 1$		$\bar{F}(\bar{z}) = \frac{C_A \cdot e^{+(k_A + k_I) \cdot \bar{z}} + 1}{(k_A + k_I)}$ $\bar{F}(\bar{x} = 1) = \frac{C_A \cdot e^{+(k_A + k_I) \cdot (1 - \bar{x})} + 1}{(k_A + k_I)}$ $\bar{F}(1 - \bar{x} = 1) = \frac{C_A \cdot e^{+(k_A + k_I) \cdot (1 - \bar{x})} + 1}{(k_A + k_I)} = 0$ $\leadsto C_A = -\frac{1}{e^{+(k_A + k_I)}}$ $\bar{F}_I(\bar{x}) = \bar{F}(1 - \bar{x}) = -\frac{e^{-(k_A + k_I) \cdot \bar{x}} - 1}{(k_A + k_I)}$		11.28	
					11.29	
Zusammenfassung L3 Summary L3	Kraft / Load	Angriff Application of force	Belastungsart Load type	Richtung Direction	Wirkung effect	11.30
	$\bar{F}_{L3A}(\bar{x}) = +\frac{e^{-(k_A + k_I) \cdot (1 - \bar{x})} - 1}{(k_A + k_I)}$	$x = 0$	Zug Tensile	negativ (+)	Verstärkt Pressung Increasing of Pressure	11.31
	$\bar{F}_{L3I}(\bar{x}) = -\frac{e^{-(k_A + k_I) \cdot \bar{x}} - 1}{(k_A + k_I)}$	$x = 1$	Zug Tensile	positiv (-)	Reduziert Pressung Reduction of pressure	11.32
	$\bar{p}_{L3}(\bar{x}) = 1 + k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) - k_I \cdot \bar{F}(1 - \bar{x})$					11.33

	$\bar{p}_{L3}(\bar{x}) = 1 - k_A \cdot \frac{e^{-(k_A+k_I) \cdot (1-\bar{x})} - 1}{(k_A + k_I)} + k_I \cdot \frac{e^{-(k_A+k_I) \cdot \bar{x}} - 1}{(k_A + k_I)}$	
		11.34

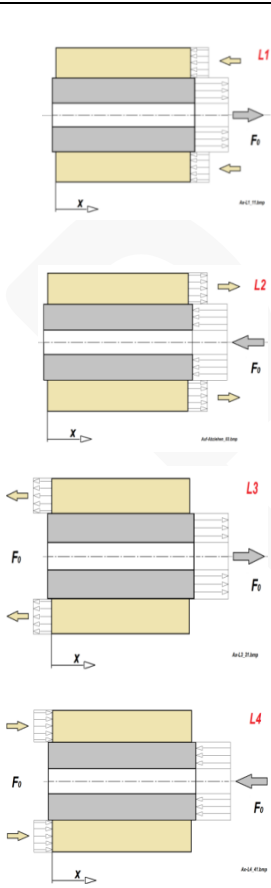
			12.00	
Allgemeine dimensionslose Gleichungen General dimensionless equations	$\bar{p}(\bar{x}) = 1 \pm k_A \cdot \bar{F}_A(\bar{x}) \pm k_I \cdot \bar{F}_I(\bar{x})$	$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$	$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$	12.01
			12.02	
Lastfall L4 Load case L4	<ul style="list-style-type: none"> Analoge Prozedur wie für Lastfall L3 Analogue procedure like load case L3 Zwei Gleichungen auf Grund von Symmetrie und Spiegelung ($y(x), x = const$) von $\bar{F}_A(\bar{x})$ und $\bar{F}_I(\bar{x})$: Two equations on the basis of symmetry and reflection ($y(x), x = const$) of $\bar{F}_A(\bar{x})$ und $\bar{F}_I(\bar{x})$: 		12.03	
	$\bar{F}_{L4A}(\bar{x}) = -\bar{F}(\bar{x}) \quad , \quad \bar{F}_{L4I}(\bar{x}) = +\bar{F}_I(1 - \bar{x})$ <p>Vorzeichen und Wirkung: Außen → Druck (+) → $-F(x)$ ← Verringerung der Pressung Innen → Druck (-) → $+F(1-x)$ ← Erhöhung der Pressung</p>		12.04	
Pressung, die innen auf das Außenteil wirkt Pressure, which acts on the inside on the outer part	$\bar{p}_{L4}(\bar{x}) = +1 - k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) + k_I \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) = + \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = - \frac{d\bar{F}(1-\bar{x})}{d(1-\bar{x})}$ $\bar{F}(\bar{x}) = + \frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) + \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(1-\bar{x})}{d(1-\bar{x})}$		12.05	
Pressung, die außen auf das Innenteil wirkt Pressure which acts externally on the inner part	$\bar{p}_{L4}(1 - \bar{x}) = +1 + k_A \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - k_I \cdot \bar{F}(\bar{x}) = + \frac{d\bar{F}(1-\bar{x})}{d(1-\bar{x})} = + \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$ $\bar{F}(1 - \bar{x}) = - \frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$		12.06	
Hinweis Note	<ul style="list-style-type: none"> Beide Gleichungen sind gekoppelt Both equations are coupled Entflechtung der Gleichung zur Ermittlung der Pressungsverteilung ist erforderlich Demerging of the equation for the determination of the pressure distribution is necessary 		12.07	
			12.08	
Pressung, die innen auf das Außenteil wirkt	<u>Pressure, which acts on the inside on the outer part</u>		12.09	
Ermittlung der zu lösenden Differentialgleichung Determination of the differential equation to be solved	$+1 - k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) + k_I \cdot \bar{F}(1 - \bar{x}) - \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \quad \leftarrow \quad \bar{F}(1 - \bar{x}) = - \frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}}$ $+1 - k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) + k_I \cdot \left(- \frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} \right) - \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0$ $-k_A \cdot \left(1 - \frac{k_I^2}{k_A^2} \right) \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) - \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0$ $-k_A \cdot \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \left(1 + \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \bar{F}(\bar{x}) + \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) - \left(1 - \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0$ $-k_A \cdot \left(1 + \frac{k_I}{k_A} \right) \cdot \bar{F}(\bar{x}) + 1 - \frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0$		12.10 (+12.05) 12.11 12.12 12.13 12.14	
Zu lösenden Differentialgleichung Differential equation to be solved	$\frac{d\bar{F}(\bar{x})}{d\bar{x}} (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) - 1 = 0$		12.15	
	Substitution:	Lösung / Solution:	12.16	
	$f(\bar{x}) = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) - 1$ $\frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{1}{(k_A+k_I)} \cdot \frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}}$ $\frac{1}{(k_A+k_I)} \cdot \frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}} + f(\bar{x}) = 0$ $\frac{f(\bar{x})}{d\bar{x}} = -(k_A + k_I)$ $\ln f(\bar{x}) = -(k_A + k_I) \cdot \bar{x} + C^*$ $f(\bar{x}) = C_A \cdot e^{-(k_A+k_I) \cdot \bar{x}} = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{x}) - 1$	$\bar{F}(\bar{x}) = \frac{C_A \cdot e^{-(k_A+k_I) \cdot \bar{x}} + 1}{(k_A+k_I)}$ $\bar{F}(\bar{x} = 1) = \frac{C_A \cdot e^{-(k_A+k_I) \cdot 1} + 1}{(k_A+k_I)} = 0$ $\leadsto C_A = - \frac{1}{e^{-(k_A+k_I)}}$ $\bar{F}_A(\bar{x}) = \bar{F}(\bar{x}) = - \frac{e^{-(k_A+k_I) \cdot (1-\bar{x})} - 1}{(k_A+k_I)}$	12.17	
			12.18	
Pressung, die außen auf das Innenteil wirkt	<u>Pressure, which acts externally on the inner part</u>		12.19	

die außen auf das Innenteil wirkt						
Ermittlung der zu lösenden Differentialgleichung Determination of the differential equation to be solved	$\bar{p}_{LA}(1-\bar{x}) = +1 + k_A \cdot \bar{F}(1-\bar{x}) - k_I \cdot \bar{F}(\bar{x}) = -\frac{d\bar{F}(1-\bar{x})}{d(1-\bar{x})} \leftarrow \bar{F}(\bar{x}) = +\frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(1-\bar{x}) + \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(1-\bar{x})}{d(1-\bar{x})}$					12.20 (+12.05)
	$-1 - k_A \cdot \bar{F}(1-\bar{x}) + k_I \cdot \left(+\frac{1}{k_A} + \frac{k_I}{k_A} \cdot \bar{F}(1-\bar{x}) + \frac{1}{k_A} \cdot \frac{d\bar{F}(1-\bar{x})}{d(1-\bar{x})} \right) - \frac{d\bar{F}(1-\bar{x})}{d(1-\bar{x})} = 0$					12.21
	$-\left(1 - \frac{k_I}{k_A}\right) - k_A \cdot \left(1 - \frac{k_I^2}{k_A^2}\right) \cdot \bar{F}(1-\bar{x}) - \left(1 - \frac{k_I}{k_A}\right) \cdot \frac{d\bar{F}(1-\bar{x})}{d(1-\bar{x})} = 0$					12.22
	$+\left(1 - \frac{k_I}{k_A}\right) + k_A \cdot \left(1 - \frac{k_I^2}{k_A^2}\right) \cdot \bar{F}(1-\bar{x}) - \left(1 - \frac{k_I}{k_A}\right) \cdot \frac{d\bar{F}(1-\bar{x})}{d(1-\bar{x})} = 0$					12.23
	$\bar{z} = 1 - \bar{x}$					12.24
	$+\left(1 + \frac{k_I}{k_A}\right) \cdot \left(1 - \frac{k_I}{k_A}\right) \cdot \bar{F}(\bar{z}) + \left(1 - \frac{k_I}{k_A}\right) + \left(1 - \frac{k_I}{k_A}\right) \cdot \frac{d\bar{F}(\bar{z})}{d(\bar{z})} = 0$					12.25
Zu lösenden Differentialgleichung Differential equation to be solved	$-\frac{d\bar{F}(\bar{z})}{d(\bar{z})} + (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{z}) + 1 = 0$					12.26
	Substitution:			Lösung / Solution:		12.27
	$f(\bar{z}) = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{z}) + 1$ $\frac{f(\bar{z})}{\bar{F}(\bar{z})} = \frac{1}{(k_A+k_I)} \cdot \frac{f(\bar{z})}{\bar{F}(\bar{z})}$ $\frac{1}{(k_A+k_I)} \cdot \frac{f(\bar{z})}{\bar{F}(\bar{z})} - f(\bar{z}) = 0$ $\frac{f(\bar{z})}{\bar{F}(\bar{z})} = (k_A + k_I)$ $\ln f(\bar{z}) = (k_A + k_I) \cdot \bar{z} + C^*$ $f(\bar{z}) = C_A \cdot e^{(k_A+k_I) \cdot \bar{z}} = (k_A + k_I) \cdot \bar{F}(\bar{z}) + 1$			$\bar{F}(\bar{z}) = \frac{C_A \cdot e^{(k_A+k_I) \cdot \bar{z} + 1}}{(k_A+k_I)}$ $\bar{F}(1-\bar{x} = 1) = \frac{C_A \cdot e^{(k_A+k_I) \cdot (1-\bar{x}) + 1}}{(k_A+k_I)} = 0$ $\sim C_I = -\frac{1}{e^{(k_A+k_I)}}$ $\bar{F}(\bar{x} - 1) = -\frac{e^{-(k_A+k_I) \cdot \bar{x} - 1}}{(k_A+k_I)}$ $\bar{F}_{LA}(\bar{x}) = +\bar{F}(1-\bar{x}) = -\frac{e^{-(k_A+k_I) \cdot \bar{x} - 1}}{(k_A+k_I)}$		12.28
						12.30
Zusammenfassung L4 Summary L4	Kraft Load	Angriff Application of force	Belastungsart Load type	Richtung Direction	Wirkung effect	12.31
	$\bar{F}_{L4A}(\bar{x}) = -\frac{e^{-(k_A+k_I) \cdot (1-\bar{x})} - 1}{(k_A+k_I)}$	$x = 0$	Druck pressure	Positiv (+)	Reduziert Reduction of Pressure	12.32
	$\bar{F}_{L4I}(\bar{x}) = -\frac{e^{-(k_A+k_I) \cdot \bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$	$x = 1$	Druck pressure	negativ (-)	Verstärkt Increasing of pressure	
$\bar{p}_{LA}(\bar{x}) = +1 - k_A \cdot \bar{F}(\bar{x}) + k_I \cdot \bar{F}(1-\bar{x})$ $\bar{p}_{LA}(\bar{x}) = 1 + k_A \cdot \frac{e^{-(k_A+k_I) \cdot (1-\bar{x})} - 1}{(k_A+k_I)} - k_I \cdot \frac{e^{-(k_A+k_I) \cdot \bar{x}} - 1}{(k_A+k_I)}$						12.33

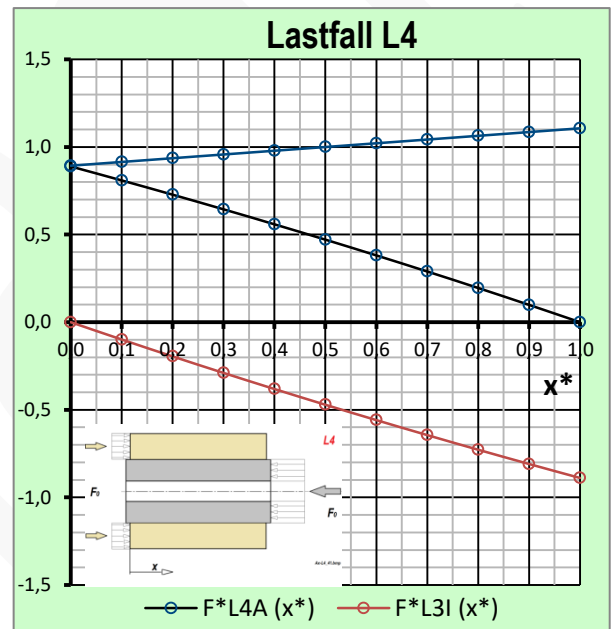
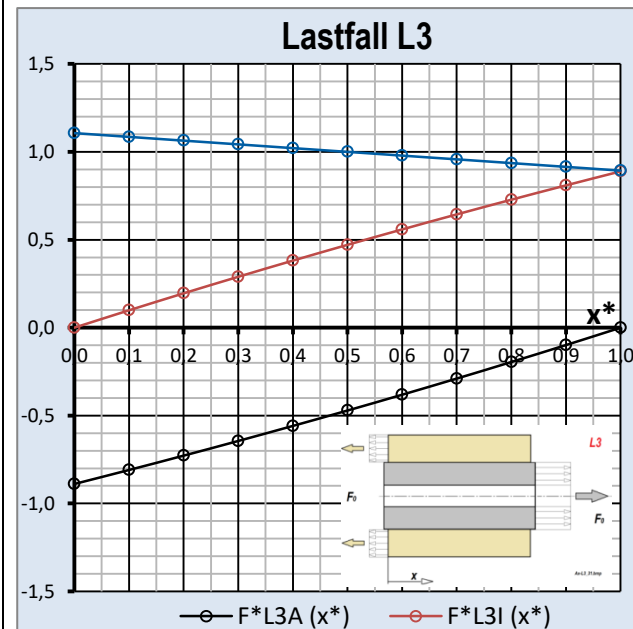
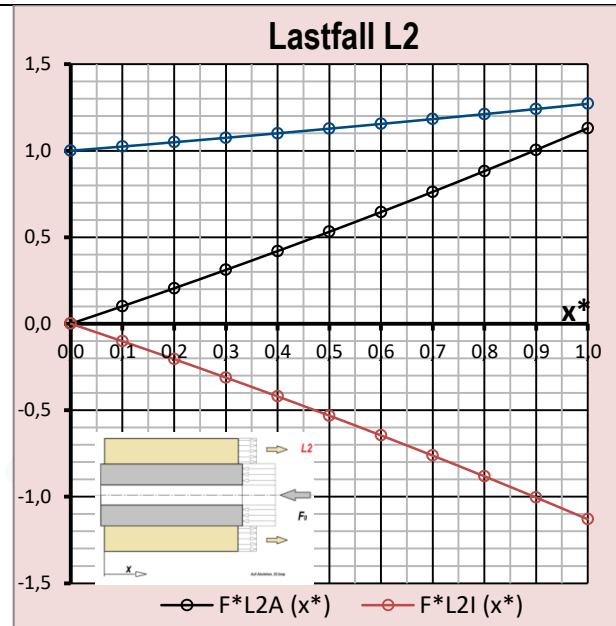
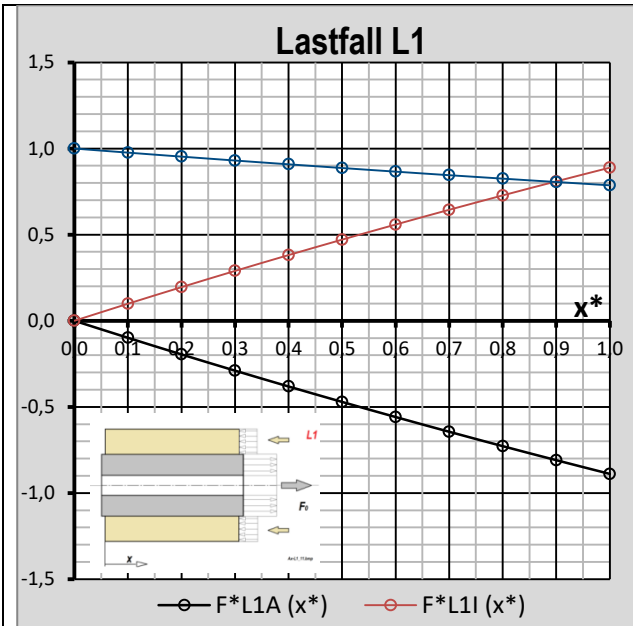


<p>9. Beispiele</p> <ul style="list-style-type: none"> Für das Beispiel wurde $k_A = k_I$ gewählt. Dadurch ergibt sich eine Kontrollmöglichkeit für die Plausibilität des Modells, die sich in einer Symmetrie bzw. Spiegelung der Pressungsverläufe widerspiegelt. Berechnungen mit anderen Geometrie- und Materialwerten sowie Pressungen sind möglich mit dem Excel-Programm unter: https://www.jbladt.de/technik/maschinenelemente-machine-elements/ It was selected $k_A = k_I$ for the example. This results in a control possibility for the plausibility of the model, which is reflected in a symmetry or reflection of the pressing courses. Calculations with other geometric and material values as well as pressures are possible with the Excel program at: https://www.jbladt.de/technik/maschinenelemente-machine-elements/ 	13.00
	13.01

Beispiele	Lastfall / Load case		L1	L2	L3	L4
Eingabe / Input	Kraftrichtung - Direction of power Außen / Innen - Inside / Outside		Druck / Zug einseitig -/+	Zug / Druck einseitig +/-	Zug / Zug beidseitig -/-	Druck / Druck beidseitig +/+
Geometrie						
Außendurchmesser / Hülse	d_A [mm]	für Test $d_F \cdot 2^{1/2}$	141,4	141,4	141,4	141,4
Fugendurchmesser	d_F [mm]		100	100	100	100
Innendurchmesser / Welle	d_i [N/mm]		0	0	0	0
Kontaktlänge / Pressungslänge / Fugenlänge	l [mm]		200	200	200	200
Belastung						
Fugenpressung ohne Längsverschiebung	p_0 [N/mm ²]		100,0	100,0	100,0	100,0
Material						
E-Modul / Außenteil	E_A [N/mm ²]	St / Fe	200.000	200.000	200.000	200.000
E-Modul / Innenteil	E_i [N/mm ²]	St / Fe	200.000	200.000	200.000	200.000
Poissonsche Zahl / Außenteil	ν_A [-]		0,30	0,30	0,30	0,30
Poissonsche Zahl / Innenteil	ν_i [-]		0,30	0,30	0,30	0,30
Reibwert	μ [-]		0,20	0,20	0,20	0,20
Berechnung						
Außendurchmesser-Relation	Q_A [-]	d_F/d_A	0,7071	0,7071	0,7071	0,7071
Innendurchmesser-Relation	Q_i [-]	d_i/d_F	0	0	0	0
Querschnittsfläche / Außenteil	A_A [mm ²]	$\pi/4 \cdot (d_A^2 - d_F^2) = \pi/4 \cdot d_A^2 (1 - Q_A^2)$	7.854	7.854	7.854	7.854
Querschnittsfläche / Innenteil	A_i [mm ²]	$\pi/4 \cdot (d_F^2 - d_i^2) = \pi/4 \cdot d_F^2 (1 - Q_i^2)$	7.854	7.854	7.854	7.854
Reibungsfläche / Fugenfläche	A_{μ} [mm ²]	$\mu \cdot \pi \cdot d_F \cdot l$	12.566	12.566	12.566	12.566
Material-und Geometrikoeffizient	k_A [-]		1,200E-01	1,200E-01	1,200E-01	1,200E-01
Material-und Geometrikoeffizient	k_i [-]		1,200E-01	1,200E-01	1,200E-01	1,200E-01
Effektives Übermaß / Außenteil	Z_A [mm]		0,1650	0,1650	0,1650	0,1650
Effektives Übermaß / Innenteil	Z_i [mm]		-0,0350	-0,0350	-0,0350	-0,0350
Effektives Übermaß / gesamt	Z_0 [mm]	$ Z_A + Z_i $	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000
Exponentfaktor L1 und L2	α [-]	$k_A + k_i$	0,24000	0,24000	0,24000	0,24000
Max. Axialkraft am Außenteil	F_{LA}^* [-]		-0,8890	1,1302	-0,8890	0,8890
Max. Axialkraft am Innenteil	F_{Li}^* [-]		0,8890	-1,1302	0,8890	-0,8890



Längenkoordinate $l(x)$	dimensionslose Längenkoordinate $x^* = x / l$	Kraftverlauf im Außenteil A			
		$F_{L1A}^*(x^*)$	$F_{L2A}^*(x^*)$	$F_{L3A}^*(x^*)$	$F_{L4A}^*(x^*)$
0,00	0,0	0,0000	0,0000	-0,8890	0,8890
20,00	0,1	-0,0988	0,1012	-0,8094	0,8094
40,00	0,2	-0,1953	0,2049	-0,7279	0,7279
60,00	0,3	-0,2894	0,3111	-0,6443	0,6443
80,00	0,4	-0,3814	0,4198	-0,5588	0,5588
100,00	0,5	-0,4711	0,5312	-0,4711	0,4711
120,00	0,6	-0,5588	0,6454	-0,3814	0,3814
140,00	0,7	-0,6443	0,7622	-0,2894	0,2894
160,00	0,8	-0,7279	0,8820	-0,1953	0,1953
180,00	0,9	-0,8094	1,0046	-0,0988	0,0988
200,00	1,0	-0,8890	1,1302	0,0000	0,0000
		Druck	Zug	Zug	Druck
		Kraftverlauf im Innenteil I			
$l(x)$	$x^* = x / l$	$F_{L1i}^*(x^*)$	$F_{L2i}^*(x^*)$	$F_{L3i}^*(x^*)$	$F_{L4i}^*(x^*)$
0,00	0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20,00	0,1	0,0988	-0,1012	0,0988	-0,0988
40,00	0,2	0,1953	-0,2049	0,1953	-0,1953
60,00	0,3	0,2894	-0,3111	0,2894	-0,2894
80,00	0,4	0,3814	-0,4198	0,3814	-0,3814
100,00	0,5	0,4711	-0,5312	0,4711	-0,4711
120,00	0,6	0,5588	-0,6454	0,5588	-0,5588
140,00	0,7	0,6443	-0,7622	0,6443	-0,6443
160,00	0,8	0,7279	-0,8820	0,7279	-0,7279
180,00	0,9	0,8094	-1,0046	0,8094	-0,8094
200,00	1,0	0,8890	-1,1302	0,8890	-0,8890
		Zug	Druck	Zug	Druck
		Pressungsverlauf in der Fuge			
$l(x)$	$x^* = x / l$	$p_{L1}^*(x^*)$	$p_{L2}^*(x^*)$	$p_{L3}^*(x^*)$	$p_{L4}^*(x^*)$
0,00	0,0	1,0000	1,0000	1,1067	0,8933
20,00	0,1	0,9763	1,0243	1,0853	0,9147
40,00	0,2	0,9531	1,0492	1,0639	0,9361
60,00	0,3	0,9305	1,0747	1,0426	0,9574
80,00	0,4	0,9085	1,1008	1,0213	0,9787
100,00	0,5	0,8869	1,1275	1,0000	1,0000
120,00	0,6	0,8659	1,1549	0,9787	1,0213
140,00	0,7	0,8454	1,1829	0,9574	1,0426
160,00	0,8	0,8253	1,2117	0,9361	1,0639
180,00	0,9	0,8057	1,2411	0,9147	1,0853
200,00	1,0	0,7866	1,2712	0,8933	1,1067



10. Ermittlung der dimensionsbehafteten Drücke und Kräfte		Determination of the dimensional pressures and forces	14.00
Druck	$p [N/mm^2]$	$p = p_0 \cdot \bar{p}$	14.01
Kraft	$F [N/mm^2]$	$F = \mu \cdot p_0 \cdot \pi \cdot d_F \cdot l \cdot \bar{F}$	14.02
			14.03

11. Einige Schlussfolgerungen und Ergebnisse	Conclusions and results	15.00
		15.01
<ul style="list-style-type: none"> ○ Aufgrund der Einfachheit des Modells haben die Ergebnisse hauptsächlich qualitativen Charakter. Unmittelbare Randeinflüsse und die Kräfteinleitung werden in diesem Modell nicht berücksichtigt. 		15.02



<ul style="list-style-type: none"> ○ Wer keine Ausgangsposition hat, der kann natürlich als grobe Näherung von den hier gegebenen Gleichungen ausgehen. Ein entsprechendes Excel-Programm lässt sich mit diesen Gleichungen einfach erstellen bzw. siehe www.jbladt.de . [5] ○ Das Zusammenspiel von Kraftangriffspunkt, Krafrichtung und Kraftwirkung auf die Deformation war bei der Berechnung der Lastfälle L1, L2, L3, L4 für das richtige Ergebnis bedeutsam. Die Wirkung der Axialkraft, ob eine Vergrößerung oder Verringerung des Übermaßes durch die Axialkraft induziert wird, ist entscheidend (siehe 08.00). Der Kraftangriffspunkt wird mit der Integrationskonstante C festgelegt. Die räumliche Krafrichtung ausgehend Kraftangriffspunkt und die Richtung der Wirkung der Kraft auf die Deformation haben nicht in jedem Fall gleiche Vorzeichen! Mit dem Kraftangriffspunkt <u>und</u> der Krafrichtung wird festgelegt, ob eine Zugkraft oder Druckkraft entsteht. ○ Die dimensionslosen Ergebnisse geben einen guten Überblick und Vergleich, wie sich Pressverbindungen bei der Betrachtung der 4 Lastfälle verhalten. Die Ergebnisse lassen sich in dimensionsbehaftete Größen umrechnen. ○ Der Lastfall L2 fordert den größten Krafteinsatz für die Verschiebung der Teile gegeneinander. ○ Es kann sein, dass manch einer die hier gewählte, ausführliche Darstellung der Ableitung der einzelnen Lastfälle als übertrieben betrachtet. Für mich war dies der sicherste und einfachste Weg, ans Ziel zu kommen. 	
<ul style="list-style-type: none"> ○ Due to the simplicity of the model, the results are mainly qualitative. The immediate influences of the edges and the introduction of the force are not taken into account in this model. ○ Whoever does not have a starting position can of course proceed as a rough approximation from the equations given here. A corresponding Excel program can be easily created with these equations or see www.jbladt.de. ○ The interaction of the force application point, the force direction and the force acting on the deformation was important for the correct result in the calculation of the load cases L1, L2, L3, L4. The effect of the axial force, whether an increase or decrease of the oversize is induced by the axial force, is decisive (see 08.00). The spatial force direction, outgoing force application point and the direction of the effect of the force on the deformation, do not always have the same sign! The force application point and the force direction determine, whether a tensile force or a compressive force is produced. ○ The dimensionless results give a good overview and comparison of how press connections behave when considering the 4 load cases. The results can be converted into dimension-related quantities. ○ The load case L2 requires the greatest force application for the displacement of the parts with respect to each other. ○ It may be that the detailed description of the derivation of the individual load cases selected here is considered exaggerate. This was the safest and easiest way for me to get there. 	15.03
	15.04

12. Quellen / Sources		16.00
1	D. Schlottmann, Maschinenelemente – Grundlage, VT Verlag Technik Berlin, 1973, S. 309 D. Schlottmann, Konstruktionslehre – Grundlagen, VT Verlag Technik Berlin, 1977, S. 409	16.01
2	W. Steinhilper, R. Röper, Maschinen- u. Konstruktionselemente, Springer 1986, Seite 89 https://books.google.de/books?id=NVe1BpaAQBAJ&pg=PA91&pg=PA91&dq=welle+nabe+verbindung+lösen&source=bl&ots=7e7vzb4z&sig=rfGqAaV2Ujks48GBYYs8AQWivio&hl=de&sa=X&ved=0ahJKEwiz74GnKTSaHvMS7zKH5laDRA4HhDpAQhNM4k#v=onepage&q=elle%20nabe%20verbindung%20%2C%3B66sen&f=false	16.02
3	Taschenbuch Maschinenbau, Bd. I, VEB Verlag Technik 1965, 517	16.03
4	H.-J. Bartsch, Taschenbuch Mathematischer Formeln, FBV Leipzig, 1999	16.04
5	https://www.jbladt.de/technik/maschinenelemente-machine-elements/	16.05