Allways in progress

# Kraftübertragung in einer einfach überlappten Klebverbindung

*Force transfer in a single lap adhesive bond*

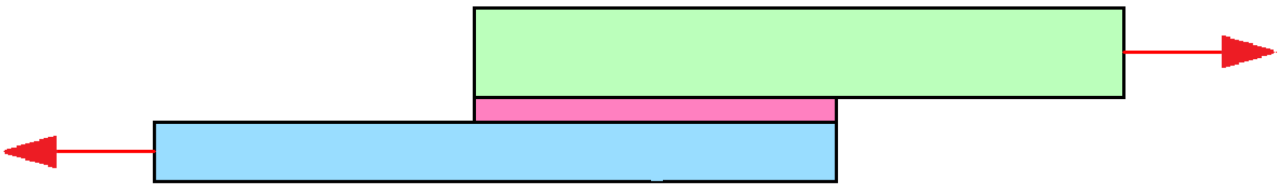
## *Eine einfache, theoretische Betrachtung*

*A simpel theoretical consideration*

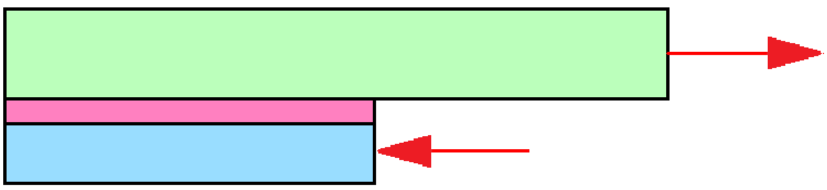
**© Klaus-Jürgen Bladt**

**Rostock, den 23.02. 2017**

**Contact: www.jbladt.de**



Kleben-1_01b.bmp



Kleben-3_05.bmp



*Zwei Dinge sind zu unserer Arbeit nötig: unermüdliche Ausdauer und die Bereitschaft, etwas, in das man viel Arbeit gesteckt hat, wieder wegzuwerfen.* ***A. E.***

*Two things are necessary for our work: indefatigable endurance and the willingness to throw away something that has been put into a lot of work. A. E.*

# Kraftübertragung in einer einfach überlappten Klebverbindung

*Force transfer in a single lap adhesive bond*

**Eine einfache theoretische Betrachtung** / A simple theoretical consideration

## 0. Anlass der Ausführungen / Reason of the remarks

- In vielen Maschinenelemente-Lehrbüchern, Nachschlagewerken und Vorlesungsskripten werden die Kraftübergang und die Belastung in der Klebfuge zwischen zwei einfachen Fügeteilen (Laschen, Bleche, Gurte, Stege, …) häufig ohne Quellenangabe dargestellt. Die Lösung des Problems wird erreicht mit Hilfe vereinfachender Annahmen und hat deshalb einen qualitativen Charakter. Sie ist aber für das Verstehen der Belastungsübertragung in der Klebefuge von Bedeutung sowie für vergleichende Betrachtungen geeignet (z.B. Auswirkung von Geometrie- und Materialänderungen). Die Betrachtungen gelten auch für ähnlich geartete Verbindungen wie z. B. Löten.
- Auf eine Darstellung des Lösungsweges wird in vielen Fällen verzichtet. Was an sich bedauerlich ist, da die Lösungsmethodik auch auf andere Probleme übertragbar ist. Es wäre schade, wenn dieses Wissen im Hintergrund bleibt.
- Die o. g. Darstellungen gehen im Allgemeinen von der Verwendung symmetrischer Bedingungen hinsichtlich Material und Geometrie aus, was aus der zentrischen Lage des Koordinatensystems und der symmetrischen Schubspannungsverteilung in der Klebfläche ersichtlich wird. Für von diesen Bedingungen abweichende Konstellationen werden meist keine Aussagen gemacht. 0.01

- In many machine element textbooks, reference books and lecture notes the force transfer and the stress in the adhesive surface between two simple joining parts (tabs, plates, belts, webs, strip etc.) are often shown without name of sources of literature. The solution of the problem is achieved with the aid of simplifying assumptions and has therefore a qualitative character. However, it is important for the understanding of stress transfer in the adhesive joint. It is also suitable for comparative considerations (e.g., the effect of geometry and material changes). The considerations also apply to similar compounds such as, for example, soldering.
- In many cases, a representation of the solution path is omitted. What is unfortunate in itself, since the method of solution is also applicable to other problems. It would be unfortunate if this knowledge remained in the background.
- The above mentioned descriptions are generally based on the use of symmetrical conditions with regard to material and geometry, which is evident from the centric position of the coordinate system and the symmetrical shear stress distribution in the adhesive surface. For constellations, which deviate from these conditions, are usually made no statements.

## 1. Ziel / Aim

- Der Lösungsweg für eine einschnittige Klebverbindung soll in detaillier, nachvollziehbaren Weise dargestellt werden.
- Annahmen und Voraussetzungen, die die Problemlösung und deren Einschätzung ermöglichen, sollen genannt werden.
- Im Ergebnis sollen Gleichungen, die zu einem möglichen Variantenvergleich verwendet werden können, zur Verfügung stehen. 1.01

- The solution path for a single adhesive bond / joint should be presented in a detailed, comprehensible manner (step by step).
- Assumptions and preconditions, which enable the problem solution and its assessment, should be mentioned.
- Equations for a possible variant comparison are to be made available in the result.

## 2. Annahmen und Voraussetzungen / Assumptions and predictions 2.01

Für die einschnittige Klebverbindung gilt:

- Die Fügeteile (Gurte, Laschen, Bleche, Stege, …) haben jeweils eine <u>konstante</u> Dicke $s_i$.
- Für die Fügeteile $i$ gilt das Hooke'sche Gesetz. Sie haben jeweils einen konstanten Elastizitätsmodul $E_i$.
- Die Fügeteile werden jeweils über den gesamten Querschnitt $A_i = s_i \cdot b$ <u>gleichmäßig</u> mit Zug $\sigma_i(x)$ belastet. Biegespannungen werden in den Fügeteilen und in der Klebefuge <u>nicht</u> berücksichtigt.
- Zug- und Druckspannungen in der Klebefuge werden <u>nicht</u> übertragen / berücksichtigt.
- Die Klebschicht ist <u>gleichmäßig</u> dick und kann aus mehreren, gleichmäßig verteilten Streifen der Anzahl $n$ mit einer konstanten Breite $b_k$ bestehen. Sie ist relativ dünn $s_i \gg h_k$.
- Die Klebschicht hat einen konstanten Gleitmodul $G$.
- Die Zugspannung in den Fügeteilen $s_i$ und die Schubspannung in der Klebschicht $h_k$ sind über die jeweilige Breite $b$ konstant. 2.01

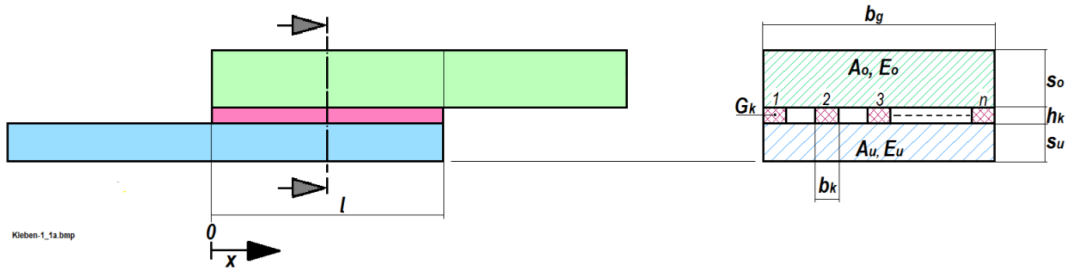
A single lap adhesive bond is considered for which:

- The joining parts (tabs, plates, belts, webs, strip etc.). Each has a constant thickness $s_i$ over length $l$.
- The Hooke law is valid for the joining parts $i$ and each have a constant modulus of elasticity $E_i$.
- The joining parts are equably loaded with tension $\sigma_i(x)$ over the complete cross area section $A_i = s_i \cdot b$. Bending stresses are not taken into account in the joining parts and in the adhesive joint.
- Tensile and compressive stresses in the adhesive joint are not transferred / considered.
- The adhesive layer is uniformly thick and can consist of several evenly distributed strips of the number $n$ with a constant width $b_k$. It is relatively thin $s_i \gg h_k$.
- The adhesive layer has a constant shear-modulus $G$.
- The tensile stress in the joining parts $s_i$ and the shearing stress in the adhesive layer $h_k$ are constant over the width .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **3. Formelzeichen** / Symbols | | | | 3.01 |
| **Geometrie** | | | Geometry | 3.02 |
| Längenkoordinate | $x$ | $mm$ | Length coordinate | 3.03 |
| Länge der Klebfuge | $l$ | $mm$ | Length of the adhesive joint | 3.04 |
| Breite der Gurte | $b_g$ | $mm$ | Width of the belts | 3.05 |
| Breite eines (1) Klebstreifens | $b_k$ | $mm$ | Width of adhesive stripes | 3.06 |
| Anzahl der Klebstreifen | $n$ | $-$ | Number of adhesive strips | 3.07 |
| Dicke des oberen Gurtes | $s_o$ | $mm$ | Thickness of the upper belt | 3.08 |
| Dicke des unteren Gurtes | $s_u$ | $mm$ | Thickness of the lower belt | 3.09 |
| Dicke der Klebschicht | $h_k$ | $mm$ | Hight of the adhesive layer | 3.10 |
| Querschnittsfläche des oberen Gurtes | $A_o$ | $mm^2$ | Cross Area of the upper belt | 3.11 |
| Querschnittsfläche des unteren Gurtes | $A_u$ | $mm^2$ | Cross Area of the lower belt | 3.12 |
| **Deformationen** | | | Deformations | 3.13 |
| Längenänderung des oberen Gurtes | $u_o(x)$ | $mm$ | Elongation of the upper belt | 3.14 |
| Längenänderung des unteren Gurtes | $u_u(x)$ | $mm$ | Elongation of the lower belt | 3.15 |
| Winkerverschiebung der Klebschicht | $\gamma(x)$ | $rad$ | Angular displacement of the lower belt | 3.16 |
| | | | | 3.17 |
| **Kräfte** | | | Forces | 3.18 |
| Kraft an den beiden Gurtenden | $F_{max}$ | $N$ | External force at both endings of the belt | 3.19 |
| Kraft im oberen Gurt im Klebfugenbereich | $F_o(x)$ | $N$ | Internal reacting force in the upper belt | 3.20 |
| Kraft im unteren Gurt im Klebfugenbereich | $F_u(x)$ | $N$ | Internal reacting force in the lower belt | 3.21 |
| In der Klebfuge übertragene Kraft | $F_k(x)$ | $N$ | In the joint transmitted force | 3.22 |
| | | | | 3.23 |
| **Spannungen** | | | Stresses | 3.24 |
| Zugspannung im oberen Gurt | $\sigma_o(x)$ | $N/mm^2$ | Normal stress in the upper belt | 3.25 |
| Zugspannung im unteren Gurt | $\sigma_u(x)$ | $N/mm^2$ | Normal stress in the lower belt | 3.26 |
| Scherspannung in der Klebfuge | $\tau(x)$ | $N/mm^2$ | Shear Stress in adhesive joint | 3.27 |
| | | | | 3.28 |
| **Materialkennwerte** | | | Material characteristics | 3.29 |
| Elastizitätsmodul des oberen Gurtes | $E_o$ | $N/mm^2$ | E-modulus of the upper belt | 3.30 |
| Elastizitätsmodul des unteren Gurtes | $E_u$ | $N/mm^2$ | E-modulus of the lower belt | 3.31 |
| Gleitmodul der Klebeschicht | $G_k$ | $N/mm^2$ | Shear modulus of the adhesive layer | 3.32 |
| | | | | 3.33 |
| **Rechengröße** | | | Computing sizes | 3.34 |
| Flächenfaktor | $p$ | $mm^2$ | Area factor | 3.35 |
| Spannungsfaktur | $q$ | $N/mm^2$ | Stressfaktor | 3.36 |
| Faktor im Exponenten | $\omega$ | $1/m$ | Factor in the exponent | 3.37 |
| | | | | 3.38 |
| | | | | 3.39 |
| | | | | 3.40 |

## 4. Darstellung der Eigenschaften der Verbindung / Representation of the properties of the adhesive joint (bond)

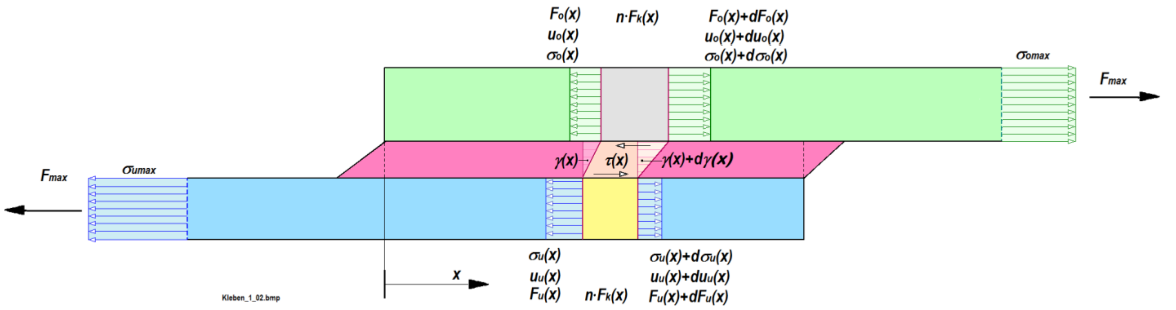
4.01



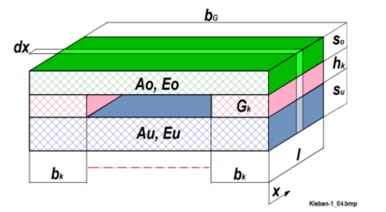

4.02

4.03

## 5. Kraftübertragungs- und Deformationsverhalten / Force transmission and deformation behavior 5.01



5.02

| Kräfte- und Verformungsbilanz<br>Bilance of forces and deformations | **Kräfte** / Forces | **Verformungen** / Deformations | 5.03 |
|---|---|---|---|
|  | $\boldsymbol{(F_o(x)+dF_o(x))-F_o(x)-n\cdot F_k(x)=0}$ ⊕ | $\boldsymbol{u_o(x)-u_u(x)=\gamma\cdot h_k}$ ⊖ | 5.04 |
| | $\boldsymbol{(F_u(x)+dF_u(x))-F_u(x)+n\cdot F_k(x)=0}$ ⊖ | $\boldsymbol{(u_o(x)+du_o(x))-(u_u(x)+du_u(x))=(\gamma(x)+d\gamma(x))\cdot h_k}$ ⊕ | 5.05 |
| | $\boldsymbol{dF_o(x)-dF_u(x)-2\cdot n\cdot F_k(x)=0}$ | $\boldsymbol{du_o(x)-du_u(x)=d\gamma(x)\cdot h_k=du_k(x)}$ | 5.06 |



**Geometrie** / Geometry 5.07

$$A_0=b_g\cdot s_o,\quad A_u=b_G\cdot s_u,\quad \frac{A_o}{A_u}=\frac{s_o}{s_u},\quad \frac{A_o}{b_G}=s_o,\quad \frac{A_u}{b_g}=s_u,\quad \frac{A_u}{b_G}=s_u$$
$$,A_{kn}=n\cdot b_k\cdot l,\quad dA_{kn}=n\cdot b_k\cdot dx,\quad \xi=x/l$$

**Allgemein gilt** / In general 5.07

$$d\sigma_o(x)=\frac{dF_o(x)}{A_o}=\frac{dF_o(x)}{b_g\cdot s_o},\qquad d\sigma_u(x)=\frac{dF_u(x)}{A_u}=\frac{dF_u(x)}{b_g\cdot s_u},\qquad \tau_k(x)=\frac{F_K(x)}{n\cdot b_k\cdot dx}$$
$$dF_o(x)=A_o\cdot d\sigma_o(x),\qquad dF_u(x)=A_u\cdot d\sigma_u(x),\qquad F_k(x)=n\cdot b_k\cdot dx\cdot\tau_k(x)$$

**Einführung von Spannung** / Introduce of stresses 5.09

$$A_o\cdot d\sigma_o(x)-A_u\cdot d\sigma_u(x)=2\cdot n\cdot b_k\cdot dx\cdot\tau_k(x)$$

5.10

$$\frac{d\sigma_o(x)}{dx}-\frac{A_U}{A_o}\cdot\frac{d\sigma_u(x)}{dx}=-\frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\tau_k(x)\qquad\qquad \frac{du_k(x)}{dx}=h_k\cdot\frac{d\gamma(x)}{dx}$$
5.11

| Spannung und Deformation<br>Stress and deformation | oberer Gurt<br>upper belt | unterer Gurt<br>lower belt | Klebeschicht<br>Adhesive coating | 5.12 |
|---|---|---|---|---|
| Zusammenhang von Spannung und Verformung<br>Correlation of stress and deformatiom | $\sigma_o(x)=E_o\cdot\varepsilon_o$ | $\sigma_u(x)=E_u\cdot\varepsilon_u$ | $\tau_k(x)=G_k\cdot\gamma(x)$ | 5.13 |
| | $\varepsilon_o=\frac{du_o}{dx}$ | $\varepsilon_u=\frac{du_u}{dx}$ | $\frac{1}{G_{hk}}\cdot\frac{d\tau_k(x)}{dx}=\frac{d\gamma(x)}{dx}$ | 5.14 |
| | $\frac{\sigma_o(x)}{E_o}=\frac{du_o}{dx}$ | $\frac{\sigma_u(x)}{E_u}=\frac{du_o}{dx}$ | $du_o(x)-du_u(x)=d\gamma(x)\cdot h_k$ | 5.15 |
| Ableitungen<br>deviations | $\frac{d\sigma_o(x)}{dx}-\frac{A_u}{A_o}\cdot\frac{d\sigma_u(x)}{dx}=\frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\tau_k(x)$ | | $\frac{\sigma_o(x)}{E_o}-\frac{\sigma_u(x)}{E_u}=h_k\cdot\frac{d\gamma(x)}{dx}$ | 5.16 |
| | $\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}-\frac{A_u}{A_o}\cdot\frac{d^2\sigma_u(x)}{dx^2}=\frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\frac{d\tau_k(x)}{dx}$ | | $\frac{\sigma_o(x)}{E_o}-\frac{\sigma_u(x)}{E_u}=\frac{h_k}{G_k}\cdot\frac{d\tau_k(x)}{dx}$ | 5.17 |
| | | | $\frac{G_k}{h_k}\cdot\left(\frac{\sigma_o(x)}{E_o}-\frac{\sigma_u(x)}{E_u}\right)=\frac{d\tau_k(x)}{dx}$ | 5.18 |

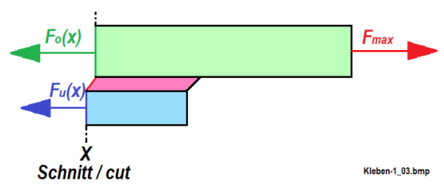
**Zusammenführung der Gleichungen** / The together of the equations

$$\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}-\frac{A_u}{A_o}\cdot\frac{d^2\sigma_u(x)}{dx^2}=\frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\underbrace{\frac{G_k}{h_k}\cdot\left(\frac{\sigma_o(x)}{E_o}-\frac{\sigma_u(x)}{E_u}\right)}_{\frac{d\tau_k(x)}{dx}}$$
5.19

$$\boldsymbol{\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}-\frac{A_u}{A_o}\cdot\frac{d^2\sigma_u(x)}{dx^2}-\frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\frac{G_k}{h_k}\cdot\left(\frac{\sigma_o(x)}{E_o}-\frac{\sigma_u(x)}{E_u}\right)=0}$$
5.20

5.21

**Kräftegleichgewicht mit den Schnittkräfte**
Equilibrium with the internal forces



5.22

**Bedingung zur Ermittlung von $\boldsymbol{\sigma_o(x)}$ *und* $\boldsymbol{\sigma_u(x)}$**
Condition for the determination of $\sigma_o(x)$ *und* $\sigma_u(x)$

$$F_o(x)\;+\;F_u(x)=-F_{max}$$
5.23

Kräftegleichgewicht: $A_o\cdot\sigma_o(x)+A_u\cdot\sigma_u(x)=-F_{max}$ 5.24

**Ermittlung der 2. Ableitung**
Determination of the 2d deviation

$$\sigma_u(x)=-\frac{F_{max}}{A_u}-\frac{A_o}{A_u}\cdot\sigma_o(x)$$
5.25

$$\frac{d^2\sigma_u(x)}{dx^2}=-\frac{A_o}{A_u}\cdot\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}$$
5.26

| | | | |
|---|---|---|---|
| Wir erinnern uns (5.20)<br>We remember (5.20) | $\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2} - \frac{A_u}{A_o}\cdot\frac{d^2\sigma_u(x)}{dx^2} - \frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\frac{G_k}{h_k}\cdot\left(\frac{\sigma_o(x)}{E_o} - \frac{\sigma_u(x)}{E_u}\right) = 0$ | | 5.27 (5.20) |
| Zwischenrechnungen<br>intercaculation | $\left(\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2} + \frac{A_u}{A_o}\cdot\frac{A_o}{A_u}\cdot\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}\right) - \frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\frac{G_k}{h_k}\cdot\left(\frac{\sigma_o(x)}{E_o} + \frac{A_o}{A_u}\cdot\frac{\sigma_o(x)}{E_u} + \frac{F_{max}}{E_u\cdot A_u}\right) = 0$ | | 5.28 |
| | $\left(\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}\right) - \frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\frac{G_k}{h_k}\cdot\left(\frac{\sigma_o(x)}{E_o} + \frac{A_o}{A_u}\cdot\frac{\sigma_o(x)}{E_u}\right) - \frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o\cdot h_k}\cdot\frac{G_k}{E_u}\cdot\frac{F_{max}}{A_u} = 0$ | | 5.29 |
| | $2\cdot\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2} - \frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\frac{G_k}{h_k}\cdot\left(\frac{1}{E_o} + \frac{A_o}{A_u}\cdot\frac{1}{E_u}\right)\cdot\sigma_o(x) - \frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\frac{G_k}{h_k}\cdot\frac{F_{max}}{E_u\cdot A_u} = 0$ | | 5.30 |
| | $\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2} - \frac{n\cdot b_k\cdot G_k}{h_k}\cdot\left(\frac{A_o\cdot E_o + A_u\cdot E_u}{A_o\cdot E_o\cdot A_u\cdot E_u}\right)\cdot\sigma_o(x) - \frac{n\cdot b_k\cdot G_k}{h_k}\cdot\frac{1}{A_o}\cdot\frac{F_{max}}{E_u\cdot A_u} = 0$ | | 5.31 |
| **Zu lösende Differentialgleichung**<br>Differential equation (to be solved) | $\boldsymbol{\sigma_o(x) - \underbrace{\frac{h_k}{n\cdot b_k\cdot G_k}\cdot\frac{A_o\cdot E_o\cdot A_u\cdot E_u}{A_o\cdot E_o + A_u\cdot E_u}}_{p}\cdot\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2} - \underbrace{\frac{A_o\cdot E_o\cdot A_u\cdot E_u}{A_o\cdot E_o + A_u\cdot E_u}\cdot\frac{F_{max}}{E_u\cdot A_o\cdot A_u}}_{q} = 0}$ | | 5.32 |
| Dimensionskontrolle<br>Dimension check | $p = \frac{h_k}{n\cdot b_k\cdot G_k}\cdot\frac{A_o\cdot E_o\cdot A_u\cdot E_u}{A_o\cdot E_o + A_u\cdot E_u}\ \left[\frac{m}{1\cdot m\cdot N/m^2}\cdot\frac{m^2\cdot N/m^2\cdot m^2\cdot N/m^2}{m^2\cdot N/m^2 + m^2\cdot N/m^2} = m^2\right]$ | | 5.33 |
| | $q = \frac{A_o\cdot E_o\cdot A_u\cdot E_u}{A_o\cdot E_o + A_u\cdot E_u}\cdot\frac{F_{max}}{E_u\cdot A_o\cdot A_u}\ \left[\frac{m^2\cdot N/m^2\cdot m^2\cdot N/m^2}{m^2\cdot N/m^2 + m^2\cdot N/m^2}\cdot\frac{N}{N/m^2\cdot m^2\cdot m^2} = \frac{N}{m^2}\right]$ | | 5.34 |
| | | | 5.35 |
| **Inhomogene Differentialgleichung**<br>inhomogeneous differential equation | $\sigma_o(x) - p\cdot\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2} - q = 0$ | | 5.36 |
| Substitution<br>Substitution | $\underbrace{\sigma_o(x) - q}_{S_o(x)} - p\cdot\underbrace{\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}}_{d^2S_o(x)/dx^2} = 0$ | | 5.37 |
| **Homogene Differentialgleichung**<br>Homogeneous differetial equation | $\boldsymbol{S_o(x) = \sigma_o(x) - q = C\cdot e^{\omega\cdot x}}$ , $\frac{d^2S_o(x)}{dx^2} = \boldsymbol{\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2} = C\cdot\omega^2\cdot e^{\omega\cdot x}}$ | | 5.38 |
| **Lösungsansatz**<br>Solution approach | $\boldsymbol{e^{\omega\cdot x} - p\cdot\omega^2\cdot e^{\omega\cdot x} = 0}\ \rightarrow\ \omega^2 = \frac{1}{p}\ \rightarrow\ \omega = \pm\sqrt{\frac{1}{p}}$ | | 5.39 |
| | | | 5.40 |
| Zwischenrechnungen<br>intercaculation | $S_o(x) = \sigma_o(x) - q\ \rightarrow\ \sigma_o(x) = S_o(x) + q$ | | 5.41 |
| | $S_o(x) = C_1\cdot e^{+\omega\cdot x} + C_2\cdot e^{-\omega\cdot x}$ , | | 5.42 |
| | $\sigma_o(x) = C_1\cdot e^{+\omega\cdot x} + C_2\cdot e^{-\omega\cdot x} + q$ | | 5.43 |
| | $\frac{\sigma_o(x)}{dx} = C_1\cdot\omega\cdot e^{+\omega\cdot x} - C_2\cdot\omega\cdot e^{-\omega\cdot x}$ | | 5.44 |
| | $\frac{\sigma_o^2(x)}{dx^2} = C_1\cdot\omega^2\cdot e^{+\omega\cdot x} + C_2\cdot\omega^2\cdot e^{-\omega\cdot x}$ | | 5.45 |
| | | | 5.46 |
| **Spannungsverlauf im oberen Gurt**<br>Stress profile in the upper belt / strip | $\sigma_o(x) = \underbrace{C_1\cdot e^{+\omega\cdot x} + C_2\cdot e^{-\omega\cdot x}}_{S_o(x)} + q$ | | 5.47 (5.43) |
| **Randbedingungen** (**oberer Gurt**)<br>Border conditions (upper belt) | $\sigma_o(x=0) = \sigma_{omin} = 0$ | $\sigma_o(x=l) = \sigma_{omin} = \frac{F_{max}}{A_o} = \sigma_{omax}$ | 5.48 |
| | $S_o(0) + q = \sigma_o(0) = 0$ | $S_o(l) + q = \sigma_o(l) = \sigma_{omax}$ | 5.49 |
| Ermittlung der Integrationskonstanten<br>Calculation of the integration constants | $\sigma_o(x=0) = C_1\cdot 1 + C_2\cdot 1 + q = 0$ | $\sigma_o(x=l) = C_1\cdot e^{\omega\cdot l} + C_2\cdot e^{-\omega\cdot l} + q = \sigma_{omax}$ | 5.50 |
| | $C_2 = -q - C_1$ | $C_2 = \frac{\sigma_{omax} - q - C_1\cdot e^{\omega\cdot l}}{e^{-\omega\cdot l}}$ | 5.51 |
| **Integrationskonstante**<br>Integration constant | $C_1 = +\frac{\sigma_{omax} - q\left(1 - e^{-\omega\cdot l}\right)}{e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l}}$ | $C_2 = -q - C_1 = \frac{\sigma_{omax} - q - C_1\cdot e^{\omega\cdot l}}{e^{-\omega\cdot l}}$<br>$-q\cdot e^{-\omega\cdot l} + q - \sigma_{omax} = -C_1\cdot(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})$<br>$-\sigma_{omax} + q\cdot(1 - e^{-\omega\cdot l}) = -C_1\cdot(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})$ | 5.52 |
| **Integrationskonstante**<br>Integration constant | $C_2 = -\frac{\sigma_{omax} - q\cdot\left(1 - e^{+\omega\cdot l}\right)}{e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l}}$ | $C_2 = -q - C_1 = -q - \frac{\sigma_{omax} - q\left(1 - e^{-\omega\cdot l}\right)}{e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l}}$<br>$C_2 = \frac{-q\cdot e^{\omega\cdot l} + q\cdot e^{-\omega\cdot l} - \sigma_{omax} + q\left(1 - e^{-\omega\cdot l}\right)}{e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l}}$ | 5.53 |
| | | | 5.54 |
| Zwischenrechnungen<br>Intercalculations | $\sigma_o(x) = C_1\cdot e^{+\omega\cdot x} + C_2\cdot e^{-\omega\cdot x} + q$ | | 5.55 (5.47) (5.43) |
| | $\sigma_o(x) = \frac{\sigma_{omax} - q\cdot\left(1 - e^{-\omega\cdot l}\right)}{\left(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l}\right)}\cdot e^{+\omega\cdot x} - \frac{\sigma_{omax} - q\cdot\left(1 - e^{\omega\cdot l}\right)}{\left(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l}\right)}\cdot e^{-\omega\cdot x} + q$ | | 5.56 |
| | $\sigma_o(x) = \frac{\sigma_{omax}\cdot(e^{\omega\cdot x} - e^{-\omega\cdot x})}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} + \frac{-q\cdot e^{\omega\cdot x} + q\cdot e^{-\omega\cdot l}\cdot e^{\omega\cdot x}}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} - \frac{-q\cdot e^{-\omega\cdot x} + q\cdot e^{\omega\cdot l}\cdot e^{-\omega\cdot x}}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} + q$ | | 5.57 |
| | $\sigma_o(x) = \frac{\sigma_{omax}\cdot(e^{\omega\cdot x} - e^{-\omega\cdot x})}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} - \frac{q\cdot(e^{\omega\cdot x} - e^{-\omega\cdot x})}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} + \frac{q\cdot e^{-\omega\cdot l}\cdot e^{\omega\cdot x} - q\cdot e^{\omega\cdot l}\cdot e^{-\omega\cdot x}}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} + q$ | | 5.58 |
| $-e^{-\omega\cdot l}\cdot e^{\omega\cdot x} + e^{\omega\cdot l}\cdot e^{-\omega\cdot x} =$<br>$-e^{-(l-x)} + e^{\omega\cdot(l-x)} = e^{\omega\cdot(l-x)} - e^{-\omega(l-x)}$ | $\sigma_o(x) = \frac{\sigma_{omax}\cdot(e^{\omega\cdot x} - e^{-\omega\cdot x})}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} - \frac{q\cdot(e^{\omega\cdot x} - e^{-\omega\cdot x})}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} - \frac{q\cdot\left(e^{(l-x)\cdot\omega} - e^{-(l-x)\cdot\omega}\right)}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} + q$ | | 5.59 |
| | $\sigma_o(x) = (\sigma_{omax} - q)\cdot\frac{(e^{\omega\cdot x} - e^{-\omega\cdot x})}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} - \frac{q\cdot\left(e^{(l-x)\cdot\omega} - e^{-(x-l)\cdot\omega}\right)}{(e^{\omega\cdot l} - e^{-\omega\cdot l})} + q$ | | 5.60 |
| | $\sigma_o(x) = (\sigma_{omax} - q)\cdot\frac{\sinh(\omega\cdot x)}{\sinh(\omega\cdot l)} - q\cdot\frac{\sinh(\omega\cdot(l-x))}{\sinh(\omega\cdot l)} + q$ | | 5.61 |
| **Spannungsverlauf im oberen Gurt**<br>Stress profil in the upper belt / strip | $\boldsymbol{\sigma_o(x) = (\sigma_{omax} - q)\cdot\frac{\sinh(\omega\cdot x)}{\sinh(\omega\cdot l)} - q\cdot\left(\frac{\sinh(\omega\cdot(l-x))}{\sinh(\omega\cdot l)} - 1\right)}$ | | 5.62 |
| | $\sigma_o(x) = (\sigma_{omax} - q)\cdot\frac{\sinh(\omega x)}{\sinh(\omega l)} - q\cdot\left(\frac{\sinh(\omega(l-x))}{\sinh(\omega l)} - 1\right)$ Excel-check richtig | | 5.63 |

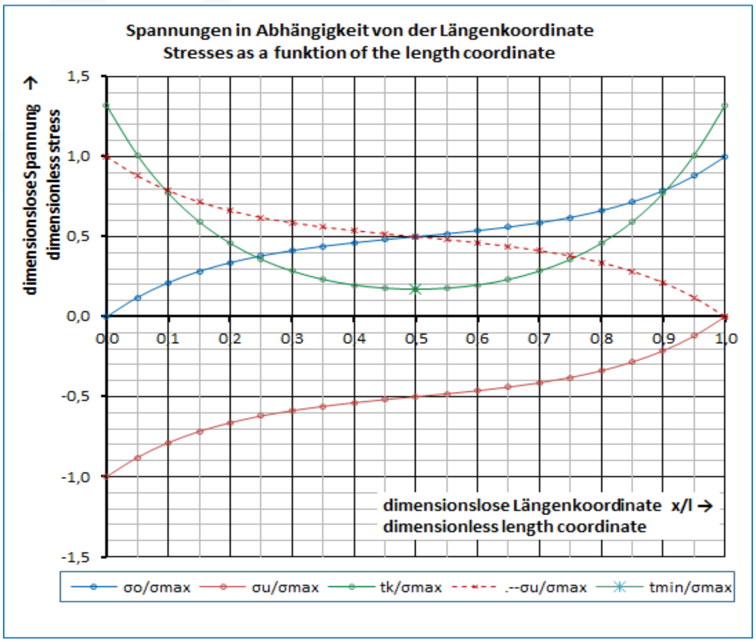
| | | | |
|---|---|---|---|
| Wir erinnern uns (5.39)<br>We remember (5.39) | $\omega = \sqrt{\frac{h_k}{n \cdot b_k \cdot G_k} \cdot \frac{A_o \cdot E_o + A_u \cdot E_u}{A_o \cdot E_o \cdot A_u \cdot E_u}}$ | $q = \frac{A_o \cdot E_o \cdot A_u \cdot E_u}{A_o \cdot E_o + A_u \cdot E_u} \cdot \frac{F_{max}}{E_u \cdot A_o \cdot A_u} = \frac{1}{1 + \frac{A_u \cdot E_u}{A_o \cdot E_o}} \cdot \frac{F_{max}}{A_o}$ | 5.64 (5.39) |
| Zwischenrechnungen<br>intercalculations | $\frac{d\sigma_o(x)}{dx} = (\sigma_{omax} + q) \cdot \omega \cdot \frac{\cosh(\omega \cdot x)}{\sinh(\omega \cdot l)} - q \cdot \omega \cdot \frac{\cosh(\omega \cdot (l - x))}{\sinh(\omega \cdot l)}$ | | 5.65 |
| | $\frac{d\sigma_o(x)}{dx} = (\sigma_{omax} + q) \cdot \frac{\cosh(\omega \cdot x)}{\sinh(\omega \cdot l)} - q \cdot \frac{\cosh(\omega \cdot (l - x))}{\sinh(\omega \cdot l)}$ | | 5.66 |
| **Spannungsverlauf im unteren Gurt**<br>Stress profile in the lower belt / strip | $\sigma_u(x) = -\frac{F_{max}}{A_u} - \frac{A_o}{A_u} \cdot \sigma_o(x) = -\frac{A_o}{A_u} \cdot \sigma_o(x) + \sigma_{umax}$ | | 5.67 (5.25) |
| Zwischenrechnungen<br>intercalculations | $\frac{d\sigma_u(x)}{dx} = -\frac{A_o}{A_u} \cdot \frac{d\sigma_o(x)}{dx}$ | | 5.68 |
| | $\frac{d^2\sigma_u(x)}{dx^2} = -\frac{A_o}{A_u} \cdot \frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}$ | | 5.69 |
| | $A_o \cdot d\sigma_o(x) - A_u \cdot d\sigma_u(x) = 2 \cdot n \cdot b_k \cdot dx \cdot \tau_k(x)$ | | 5.70 (5.09) |
| | $\tau_k(x) = \frac{A_o}{2 \cdot n \cdot b_k} \cdot \left(\frac{d\sigma_o(x)}{dx} + \frac{A_u}{A_o} \cdot \frac{A_o}{A_u} \cdot \frac{d\sigma_o(x)}{dx}\right)$ | | 5.71 |
| | $\boldsymbol{\tau_k(x) = \frac{A_o}{n \cdot b_k} \cdot \frac{d\sigma_o(x)}{dx}}$ | | 5.72 |
| | | | 5.73 |
| **Spannungsverlauf in der Klebfuge**<br>Stress profile in the adhesive joint | $\tau_k(x) = \frac{A_o}{n \cdot b_k} \cdot \frac{d}{dx}\left((\sigma_{omax} - q) \cdot \frac{\sinh(\omega \cdot x)}{\sinh(\omega \cdot l)} - q \cdot \left(\frac{\sinh(\omega \cdot (l - x))}{\sinh(\omega \cdot l)} - 1\right)\right)$ | | 5.74 |
| | $\boldsymbol{\tau_k(x) = \frac{A_o}{n \cdot b_k} \cdot \omega \cdot \left((\sigma_{omax} - q) \cdot \frac{\cosh(\omega \cdot x)}{\sinh(\omega \cdot l)} + q \cdot \frac{\cosh(\omega \cdot (l - x))}{\sinh(\omega \cdot l)}\right)}$ | | 5.75 |
| etc. | $(\sinh x)' = \cosh x$ , $(\cosh x)' = \sinh(x)$ | | 5.76 |
| **Minimum von $\tau_k(x)$**<br>Minimum of $\tau_k(x)$ | $\frac{\tau_k(x)}{dx} = 0 = \frac{A_o}{n \cdot b_k} \cdot \omega^2 \cdot \left((\sigma_{omax} - q) \cdot \frac{\sinh(\omega \cdot x)}{\sinh(\omega \cdot l)} - q \cdot \frac{\sinh(\omega \cdot (l - x))}{\sinh(\omega \cdot l)}\right)$ | | 5.77 |
| Zwischenrechnung<br>Intercalculation | $\sinh(\alpha_1 + \alpha_2) = sinh\alpha_1 \cdot cosh\alpha_2 - \cosh\alpha_1 \cdot sinh\alpha_2$ | | 5.78 |
| | $\frac{(\sigma_{omax} - q)}{q} = \frac{sinh(\omega \cdot (l - x))}{sinh(\omega \cdot x)} = \frac{sinh(\omega \cdot l) \cdot cosh(\omega \cdot x)}{sinh(\omega \cdot x)} - \frac{cosh(\omega \cdot l) \cdot sinh(\omega \cdot x)}{sinh(\omega \cdot x)}$ | | 5.79 |
| | $\frac{(\sigma_{omax} - q)}{q} = sinh(\omega \cdot l) \cdot tanh(\omega \cdot x) - cosh(\omega \cdot l)$ | | 5.80 |
| | $tanh(\omega \cdot x) = \frac{\sigma_{omax} - q \cdot (1 - \cosh(\omega \cdot l))}{q \cdot sinh(\omega \cdot l)}$ | | 5.81 |
| **Lage des Minimalwertes von $\tau_{min}$**<br>Location of the minimal value of $\tau_{min}$ | $\boldsymbol{x(\tau_{kmin}) = \frac{1}{\omega} \cdot artanh\left(\frac{\sigma_{omax} - q \cdot (1 - cosh(\omega \cdot l))}{q \cdot sinh(\omega \cdot l)}\right)}$ | | 5.82 |
| | | | 5.83 |
| | | | 5.84 |

| | | |
|---|---|---|
| **6. Beispiele**<br>Examples | $\Downarrow$ | 6.01 |

## **Symmetrisch Bedingungen**

Symmertric coditions

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | input ↓ | | |
| **Kraft durch die Gurte** | $F_{max}$ | $N$ | → | 10000,0 | | |
| **Geometrie** | | | | | | |
| **Gurte** | | | → | | | |
| Länge der Klebverbindung | $l$ | mm | → | 100,00 | | |
| Breite der Gurte | $b_g$ | mm | → | 80,00 | | |
| Dicke des oberen Guttes | $s_o$ | mm | → | 12,00 | | |
| Dicke des unteren Gurtes | $s_u$ | mm | → | 12,00 | | |
| **Klebstreifen** | | | | | | |
| Breite der Klebstreifen | $b_k$ | mm | → | 4,00 | $n \cdot b_k \leq b_g =$ | 80,0 |
| Anzahl der Klebsteifen (ganzzahlig) | $n$ | mm | → | 5 | $n \cdot b_k =$ | 20,0 |
| Dicke der Klebstreifen | $h_k$ | mm | → | 0,10 | | |
| **Materialkennwerte** | | | | | | |
| Elastizitäts-Modul oberer Gut | $E_o$ | N/mm² | → | 210.000 | | |
| Elastizitäts-Modul oberer Gut | $E_u$ | N/mm² | → | 210.000 | | |
| Gleitmodul des Klebstreifen | $G_k$ | N/mm² | → | 1.500 | | |
| **Rechen- u. Kontrollgrößen** | | | | | | |
| Querschnittfläche des oberen Gurtes | $A_o$ | mm² | $.=b_g \cdot s_o$ | 960,0 | | |
| Querschnittfläche des unteren Gurtes | $A_u$ | mm² | $.=b_g \cdot s_u$ | 960,0 | | |
| Klebfläche | $A_k$ | mm² | $.=n \cdot b_k \cdot l$ | 2.000,0 | | |
| Koeffizient | $p$ | 1/mm² | → | 3,36E+02 | | |
| Koeffizient | $q$ | N/mm² | → | 5,208E+00 | | |
| Exponentfaktor | $\omega$ | 1/m | $.=1/q^{1/2}$ | 5,46E-02 | | |
| Max. Zugspannung im oberenGurt | $\sigma_{omax}$ | N/mm² | $.=F_{max}/A_o$ | 10,4167 | | |
| Max. Zugspannung im unterenGurt | $\sigma_{umax}$ | N/mm² | $.=F_{max}/A_u$ | -10,417 | | |
| Absolute max. Zugspannung | $\sigma_{max}$ | N/mm² | $.=Max(F_{max>}/A_{o/u})$ | **10,417** | | |
| | $\tau_{max}$ | N/mm² | → | 13,756 | | |
| mittlere Scherspannung in der Klebschicht | $\tau_{km}$ | N/mm² | $.=F_{max}/A_k$ | 5,000 | 0,48 | $\tau_m/\sigma_{max}$ |
| Lage für minimale Scherspannung | $\tau_{min}$ | N/mm² | → | 1,791 | 0,1719 | $\tau_{min}/\sigma_{max}$ |
| Lage für minimale Scherspannung | $x(\tau_{min})$ | mm | → | 50,00 | 0,9915 | 0,500 |
| | ***dimensionslose Darstellung*** | | | | | |
| **Berechnung über die Gurtlänge** | $x$ | $x/l$ | $\sigma_o/\sigma_{max}$ | $\sigma_u/\sigma_{max}$ | $\tau_k/\sigma_{max}$ | $.\text{--}\sigma_u/\sigma_{max}$ |
| | 0,00 | 0,00 | 0,0000 | -1,0000 | 1,3205 | 1,0000 |
| | 5,00 | 0,05 | 0,1206 | -0,8794 | 1,0084 | 0,8794 |
| | 10,00 | 0,10 | 0,2127 | -0,7873 | 0,7717 | 0,7873 |
| | 15,00 | 0,15 | 0,2833 | -0,7167 | 0,5928 | 0,7167 |
| | 20,00 | 0,20 | 0,3377 | -0,6623 | 0,4583 | 0,6623 |
| | 25,00 | 0,25 | 0,3800 | -0,6200 | 0,3582 | 0,6200 |
| | 30,00 | 0,30 | 0,4133 | -0,5867 | 0,2848 | 0,5867 |
| | 35,00 | 0,35 | 0,4401 | -0,5599 | 0,2328 | 0,5599 |
| | 40,00 | 0,40 | 0,4624 | -0,5376 | 0,1981 | 0,5376 |
| | 45,00 | 0,45 | 0,4819 | -0,5181 | 0,1783 | 0,5181 |
| | 50,00 | 0,50 | 0,5000 | -0,5000 | 0,1719 | 0,5000 |
| | 55,00 | 0,55 | 0,5181 | -0,4819 | 0,1783 | 0,4819 |
| | 60,00 | 0,60 | 0,5376 | -0,4624 | 0,1981 | 0,4624 |
| | 65,00 | 0,65 | 0,5599 | -0,4401 | 0,2328 | 0,4401 |
| | 70,00 | 0,70 | 0,5867 | -0,4133 | 0,2848 | 0,4133 |
| | 75,00 | 0,75 | 0,6200 | -0,3800 | 0,3582 | 0,3800 |
| | 80,00 | 0,80 | 0,6623 | -0,3377 | 0,4583 | 0,3377 |
| | 85,00 | 0,85 | 0,7167 | -0,2833 | 0,5928 | 0,2833 |
| | 90,00 | 0,90 | 0,7873 | -0,2127 | 0,7717 | 0,2127 |
| | 95,00 | 0,95 | 0,8794 | -0,1206 | 1,0084 | 0,1206 |
| | 100,00 | 1,00 | 1,0000 | 0,0000 | 1,3205 | 0,0000 |




6.02

6.03

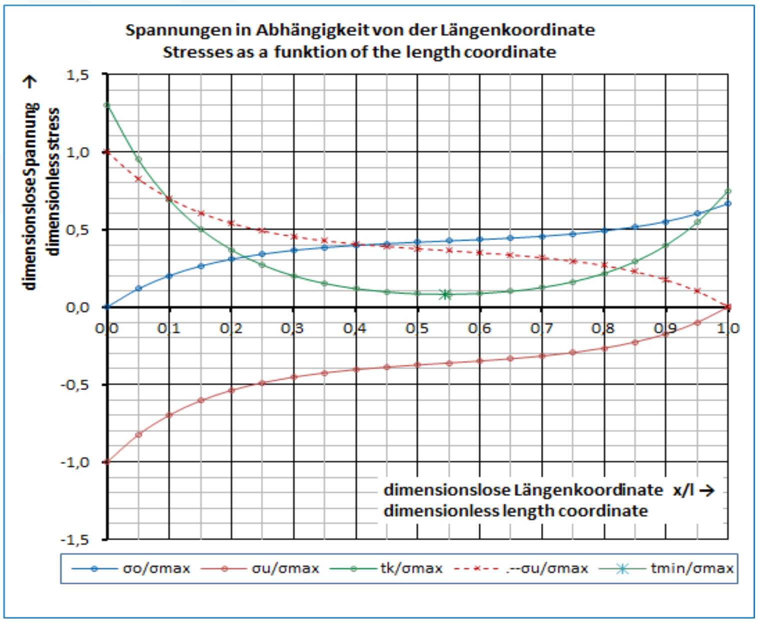
# Unsymmetrische Bedingungen

## Asymmetric conditions

| | | | | input ↓ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Kraft durch die Gurte** | $F_{max}$ | N | → | 10000,0 | | |
| **Geometrie** | | | | | | |
| **Gurte** | | | → | | | |
| Länge der Klebverbindung | $l$ | mm | → | 100,00 | | |
| Breite der Gurte | $b_g$ | mm | → | 80,00 | | |
| Dicke des oberen Guttes | $s_o$ | mm | → | 12,00 | | |
| Dicke des unteren Gurtes | $s_u$ | mm | → | 8,00 | | |
| **Klebstreifen** | | | | | | |
| Breite der Klebstreifen | $b_k$ | mm | → | 4,00 | $n \cdot b_k \le b_g =$ | 80,0 |
| Anzahl der Klebsteifen (ganzzahlig) | $n$ | mm | → | 5 | $n \cdot b_k =$ | 20,0 |
| Dicke der Klebstreifen | $h_k$ | mm | → | 0,10 | | |
| **Materialkennwerte** | | | | | | |
| Elastizitäts-Modul oberer Gut | $E_o$ | N/mm² | → | 210.000 | | |
| Elastizitäts-Modul oberer Gut | $E_u$ | N/mm² | → | 180.000 | | |
| Gleitmodul des Klebstreifen | $G_k$ | N/mm² | → | 1.500 | | |
| **Rechen- u. Kontrollgrößen** | | | | | | |
| Querschnittfäche des oberen Gurtes | $A_o$ | mm² | $.=b_g \cdot s_o$ | 960,0 | | |
| Querschnittfläche des unteren Gurtes | $A_u$ | mm² | $.=b_g \cdot s_u$ | 640,0 | | |
| Klebfläche | $A_k$ | mm² | $.=n \cdot b_k \cdot l$ | 2.000,0 | | |
| Koeffizient | $p$ | 1/mm² | → | 2,44E+02 | | |
| Koeffizient | $q$ | N/mm² | → | 6,629E+00 | | |
| Exponentfaktor | $\omega$ | 1/m | $.=1/q^{1/2}$ | 6,40E-02 | | |
| Max. Zugspannung im oberenGurt | $\sigma_{omax}$ | N/mm² | $.=F_{max}/A_o$ | 10,4167 | | |
| Max. Zugspannung im unterenGurt | $\sigma_{umax}$ | N/mm² | $.=F_{max}/A_u$ | -15,625 | | |
| Absolute max. Zugspannung | $\sigma_{max}$ | N/mm² | $.=Max(F_{max>}/A_{o/u})$ | **15,625** | | |
| | $\tau_{max}$ | N/mm² | → | 20,393 | | |
| mittlere Scherspannung in der Klebschicht | $\tau_{km}$ | N/mm² | $.=F_{max}/A_k$ | 5,000 | 0,32 | $\tau_m/\sigma_{max}$ |
| Lage für minimale Scherspannung | $\tau_{min}$ | N/mm² | → | 1,259 | 0,0806 | $\tau_{min}/\sigma_{max}$ |
| Lage für minimale Scherspannung | $x(\tau_{min})$ | mm | → | 54,39 | 0,9981 | 0,544 |

| | | | dimensionslose Darstellung | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Berechnung über die Gurtlänge** | $x$ | $x/l$ | $\sigma_o/\sigma_{max}$ | $\sigma_u/\sigma_{max}$ | $\tau_k/\sigma_{max}$ | $.--\sigma_u/\sigma_{max}$ |
| | 0,00 | 0,00 | 0,0000 | -1,0000 | 1,3052 | 1,0000 |
| | 5,00 | 0,05 | 0,1164 | -0,8254 | 0,9487 | 0,8254 |
| | 10,00 | 0,10 | 0,2010 | -0,6985 | 0,6901 | 0,6985 |
| | 15,00 | 0,15 | 0,2626 | -0,6060 | 0,5027 | 0,6060 |
| | 20,00 | 0,20 | 0,3076 | -0,5387 | 0,3672 | 0,5387 |
| | 25,00 | 0,25 | 0,3405 | -0,4893 | 0,2696 | 0,4893 |
| | 30,00 | 0,30 | 0,3647 | -0,4530 | 0,1998 | 0,4530 |
| | 35,00 | 0,35 | 0,3828 | -0,4258 | 0,1506 | 0,4258 |
| | 40,00 | 0,40 | 0,3966 | -0,4051 | 0,1170 | 0,4051 |
| | 45,00 | 0,45 | 0,4076 | -0,3886 | 0,0954 | 0,3886 |
| | 50,00 | 0,50 | 0,4168 | -0,3748 | 0,0837 | 0,3748 |
| | 55,00 | 0,55 | 0,4253 | -0,3620 | 0,0806 | 0,3620 |
| | 60,00 | 0,60 | 0,4339 | -0,3491 | 0,0859 | 0,3491 |
| | 65,00 | 0,65 | 0,4435 | -0,3347 | 0,0999 | 0,3347 |
| | 70,00 | 0,70 | 0,4551 | -0,3174 | 0,1244 | 0,3174 |
| | 75,00 | 0,75 | 0,4699 | -0,2952 | 0,1616 | 0,2952 |
| | 80,00 | 0,80 | 0,4893 | -0,2660 | 0,2155 | 0,2660 |
| | 85,00 | 0,85 | 0,5155 | -0,2267 | 0,2917 | 0,2267 |
| | 90,00 | 0,90 | 0,5511 | -0,1733 | 0,3979 | 0,1733 |
| | 95,00 | 0,95 | 0,5998 | -0,1002 | 0,5452 | 0,1002 |
| | 100,00 | 1,00 | 0,6667 | 0,0000 | 0,7487 | 0,0000 |

6.04




6.05

## 7. Abschließende Bemerkungen
Final remarks

- Der Weg bis zum Ergebnis wurde ausführlich und nachvollziehbar beschrieben.
- Anhand von Beispielrechnungen kann gezeigt werden, dass mit dem erreichten Ergebnis das qualitative Verhalten von Klebverbindungen unterschiedlicher Ausführung untersucht und verglichen werden kann. Maximal- und Minimalwerte werden in der Realität erwartungsgemäß nicht so stark ausgeprägt sein.
- Der Gleitmodul für eine Klebschicht ist schwer ermittelbar. Aber wie aus der Literatur allgemein ersichtlich, ist das möglich durch geeignete Zug- und Scherversuche.
- In der Praxis werden andere Wege zur Auslegung von Klebverbindungen beschritten, die weitgehend auf Versuchen aufbauen und damit in der hier vorgestellten Methode eine nicht erfassbare Vielfalt anderer Parameter einschließen. Der Charakter der Verbindung wird dabei nicht offensichtlich. 7.01

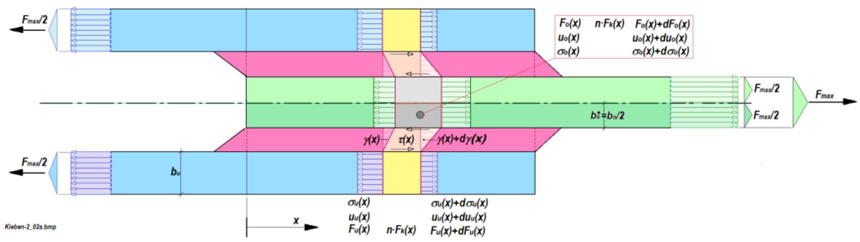
- The path to the result has been described in detail and comprehensibly.
- Based on the example calculations, it can be shown that with the reached result, that the qualitative behavior of adhesive bonds of different designs can be examined and compared. Maximum and minimum values will not be as pronounced as expected in reality.
- The shear-module for an adhesive layer is difficult to determine. But as is generally apparent from the literature, this is possible by suitable tensile and shearing tests.
- Other approaches for the design of adhesive bonds are used in the practice, which are based largely on tests and therefore include the unrecognized variety of other parameters. In this case, the character of the connection is not obvious.

## 8. Literaturhinweise / Literatur references 8.01


| | |
|---|---|
| **Friedrich Jaeger**, Spannungs- und Dehnungsverhalten von Metallklebungen, Dissertation, Promotion 3281, Eidgenössische Hochschule Zürich, 1962 | 8.02 |
| **O. Volkersen**, Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. Luftfahrtforschung, 15:41–47, 1938. | 8.03 |
| **O. Volkersen**, Die Schubkraftverteilung in Leim-, Niet- und Bolzenverbindungen. Energie u. Tech., Seiten 68–71, 103–108 u. 150–154, 1953. | 8.04 |
| Roloff / Matek, Maschinenelemente, 15. Auflage, 2001, Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden | 8.05 |
| D. Schlottmann, Maschinenelemente, 1973, VEB Verlag Technik, Berlin | 8.06 |
| A. Böge, Taschenbuch Maschinenbau, 21. Auflage, Verlag Springer Vieweg, 2013, I42 | 8.07 |
| K.-H. Grote, J. Feldhusen, Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau, Verlag Springer, 2011 | 8.09 |
| K.-J. Bladt, Axiale Lastverteilung im Gewinde einer Schraubenverbindung mit einer Druck- bzw. einer Zugmutter, screw-web_01.pdf, https://www.jbladt.de/technik/maschinenelemente-machine-elements/ | 8.10 |
| H.-J. Bartsch, Taschenbuch Mathematischer Formeln, 18. Auflage, Carl Hanser Verlag 1999 | 8.11 |
| I.N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, Taschenbuch der Mathematik, 4. Auflage, Verlag Harri Deutsch 1999 | 8.12 |
| | 8.13 |


## Anhang / Appendix

## 9. Symmetrische, zweifach überlappte Klebverbindung / symmetric double lap ahesive joint (bond) 9.01

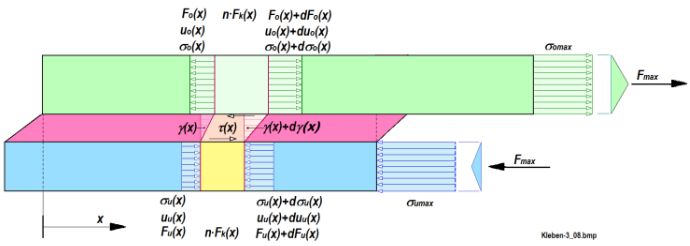
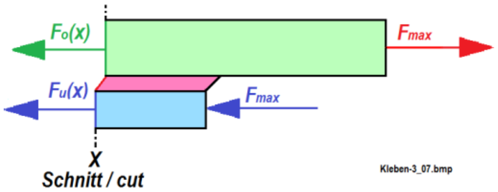



9.02

Wie aus dem Bild ersichtlich, kann eine symmetrische, zweifach überlappte Klebverbindung auf Grund ihrer Symmetrie sinngemäß auf die gleiche Weise berechnet werden, wenn eine entsprechende Aufteilung der Geometrie und der durchzuleitenden Kraft vorgenommen wird. Soweit Symmetrie vorhanden ist, können auch mehrfach überlappte Verbindungen betrachtet werden.
As can be seen in the figure, a symmetrical double-lapped adhesive bond can be calculated analogously in the same way by virtue of its symmetry if a corresponding division of the geometry and of the transmitted force is performed. As far as symmetry is present, multiple overlapped connections can also be considered. 9.03

9.04

## 10. Zugbelastung im oberen Gurt und Schubbelastung im unteren Gurt
Tensile load in the upper belt and thrust load in the upper belt 10.01

| | | |
|---|---|---|
| **Geometrie, Käfte und Spannungen** siehe 5.02 – 5.20<br>Geometry, forces and stresses 5.02 – 5.20 |  | 10.02 |
| **Kräftegleichgewicht mit den Schnittkräfte** (siehe 5.22)<br>Equilibrium of the cutting forces (see 5.22) |  | 10.03 |
| **Bedingung zur Ermittlung von $\sigma_o(x)$ und $\sigma_u(x)$** (siehe 5.23, 5.24)<br>Condition for the determination of $\sigma_o(x)$ und $\sigma_u(x)$ (see 5.23, 5.24) | $F_o(x)+F_u(x)-F_{max}+F_{max}=0$<br>$F_o(x)+F_u(x)=0$ | 10.04 |
| | Kräftegleichgewicht: $A_o\cdot\sigma_o(x)+A_u\cdot\sigma_u(x)=0$ | 10.05 |
| Siehe 5.25<br>See 5.25 | $\sigma_u(x)=-\frac{A_o}{A_u}\cdot\sigma_o(x)$ | 10.06 |
| Ermittlung der 2. Ableitung<br>Determination of the 2d deviation | $\frac{d^2\sigma_u(x)}{dx^2}=-\frac{A_o}{A_u}\cdot\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}$ | 10.07 |
| Siehe 5.02 – 5.20<br>See 5.02 – 5.20 | $\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}-\frac{A_u}{A_o}\cdot\frac{d^2\sigma_u(x)}{dx^2}-\frac{2\cdot n\cdot b_k}{A_o}\cdot\frac{G_k}{h_k}\cdot\left(\frac{\sigma_o(x)}{E_o}-\frac{\sigma_u(x)}{E_u}\right)=0$ | 10.08 |
| **Homogene Differentialgleichung**<br>Homogenous diffential equation | $\sigma_o(x)-\underbrace{\frac{h_k}{n\cdot b_k\cdot G_k}\cdot\frac{A_o\cdot E_o\cdot A_u\cdot E_u}{A_o\cdot E_o+A_u\cdot E_u}}_{p}\cdot\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}=0$ | 10.09 |
| | $\sigma_o(x)-p\cdot\frac{d^2\sigma_o(x)}{dx^2}=0$ | 10.10 |
| **Lösungsansatz**<br>Solution approach | $\sigma_o(x)=C\cdot e^{\omega\cdot x}$, $\frac{\sigma_o^2(x)}{dx^2}=C\cdot\omega^2\cdot e^{\omega\cdot x}$ | 10.11 |
| Exponent<br>Exponent | $e^{\omega\cdot x}-\omega^2\cdot e^{\omega\cdot x}=0\ \rightarrow\ \omega=\pm\sqrt{1/p}$ | 10.12 |
| **Lösung**<br>Solution | $\sigma_o(x)=C_1\cdot e^{+\omega\cdot x}+C_2\cdot e^{-\omega\cdot x}$ | 10.13 |
| Exponentfaktor<br>Factor of exponent | $\omega=\pm\sqrt{\frac{n\cdot b_k\cdot G_k}{h_k}\cdot\frac{A_o\cdot E_o+A_u\cdot E_u}{A_o\cdot E_o\cdot A_u\cdot E_u}}\ [1/mm]$ | 10.14 |
| Randbedingungen<br>Border conditions | $\sigma_o(x=0)=0$ , $\sigma_o(x=l)=\sigma_{omax}$ | 10.15 |
| Integrationskonstanten<br>Integration constants | $\sigma_o(x=0)=0$: $0=C_1+C_2\ \rightarrow$<br>$C_1=-C_2$ | 10.16 |
| | $\sigma_o(x=0)=0$: $\sigma_{omax}=C_1\cdot e^{+\omega\cdot l}-C_1\cdot e^{-\omega\cdot l}\ \rightarrow$<br>$C_1=\frac{\sigma_{omax}}{(e^{+\omega\cdot l}-e^{-\omega\cdot l})}$ | 10.17 |
| | $\sigma_o(x)=\sigma_{omax}\cdot\frac{e^{+\omega\cdot x}-e^{-\omega\cdot x}}{(e^{+\omega\cdot l}-e^{-\omega\cdot l})}$ | 10.18 |
| **Spannungsverlauf in den Gurten**<br>Stress profile in the belts / strip | $\sigma_o(x)=+\ \sigma_{omax}\cdot\frac{\sin h(\omega\cdot x)}{\sin h(\omega\cdot l)}$ | 10.19 |
| | $\sigma_u(x)=-\frac{A_u}{A_o}\cdot\sigma_{omax}\cdot\frac{\sin h(\omega\cdot x)}{\sin h(\omega\cdot l)}$ | 10.20 |
| Siehe 5.70 – 5.72<br>See 5.70 - 5.72 | $A_o\cdot d\sigma_o(x)-A_u\cdot d\sigma_u(x)=2\cdot n\cdot b_k\cdot dx\cdot\tau_k(x)$<br>$\tau_k(x)=\frac{A_o}{2\cdot n\cdot b_k}\cdot\left(\frac{d\sigma_o(x)}{dx}+\frac{A_u}{A_o}\cdot\frac{A_o}{A_u}\cdot\frac{d\sigma_o(x)}{dx}\right)=\frac{A_o}{n\cdot b_k}\cdot\frac{d\sigma_o(x)}{dx}$ | 10.21 |
| **Spannungsverlauf in der Klebfuge**<br>Stress profile in the adhesive joint | $\tau_k(x)=\frac{A_o}{n\cdot b_k}\cdot\sigma_{omax}\cdot\omega\cdot\frac{\cosh(\omega\cdot x)}{\sinh(\omega\cdot l)}$ | 10.22 |
| **Hinweis**<br>Note | Die unter 7.01 und 9.02 aufgeführten Bemerkungen gelten auch hier.<br>The comments listed under 7.01 and 9.02 also apply here. | 10.23 |
| | | 10.24 |

# Beispiel
Example

## Unsymmetrische Bedingungen
Asymmetric conditions

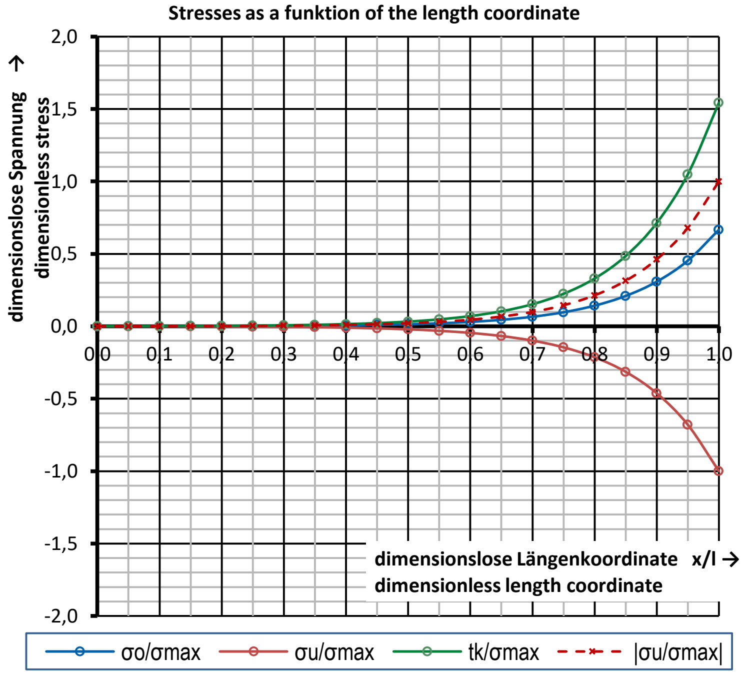
### Klebverbindung - 2 / Adhesive bond - 2

| | | | | input ↓ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Kraft durch die Gurte** | $F_{max}$ | $N$ | → | 10.000,0 | | |
| **Geometrie** | | | | | | |
| **Gurte** | | | → | | | |
| Länge der Klebverbindung | $l$ | mm | → | 100,00 | | |
| Breite der Gurte | $b_g$ | mm | → | 50,00 | | |
| Dicke des oberen Guttes | $s_o$ | mm | → | 12,00 | | |
| Dicke des unteren Gurtes | $s_u$ | mm | → | 8,00 | | |
| **Klebstreifen** | | | | | | |
| Breite der Klebstreifen | $b_k$ | mm | → | 4,00 | $n \cdot b_k \leq b_g =$ | 50,0 |
| Anzahl der Klebsteifen (ganzzahlig) | $n$ | mm | → | 5 | $n \cdot b_k =$ | 20,0 |
| Dicke der Klebstreifen | $h_k$ | mm | → | 0,10 | | |
| **Materialkennwerte** | | | | | | |
| Elastizitäts-Modul oberer Gut | $E_o$ | N/mm² | → | 210.000 | | |
| Elastizitäts-Modul oberer Gut | $E_u$ | N/mm² | → | 210.000 | | |
| Gleitmodul des Klebstreifen | $G_k$ | N/mm² | → | 1.500 | | |
| **Rechen- u. Kontrollgrößen** | | | | | | |
| Querschnittfäche des oberen Gurtes | $A_o$ | mm² | $.=b_g \cdot s_o$ | 600,0 | | |
| Querschnittfläche des unteren Gurtes | $A_u$ | mm² | $.=b_g \cdot s_u$ | 400,0 | | |
| Klebfläche | $A_k$ | mm² | $.=n \cdot b_k \cdot l$ | 2.000,0 | | |
| Koeffizient | $p$ | 1/mm² | → | 1,68E+02 | | |
| Exponentfaktor | $\omega$ | 1/m | $.=1/q^{1/2}$ | 7,72E-02 | | |
| Max. Zugspannung im oberenGurt | $\sigma_{omax}$ | N/mm² | $.=F_{max}/A_o$ | 16,67 | | |
| Max. Zugspannung im unterenGurt | $\sigma_{umax}$ | N/mm² | $.=F_{max}/A_u$ | -25,00 | | |
| Absolute max. Zugspannung | $\sigma_{max}$ | N/mm² | $.=Max(F_{max>}/A_{o/u})$ | **25,00** | | |
| Max. Scherspannung | $\tau_{max}$ | N/mm² | Max $\tau(x)$ | 38,58 | Check | |
| mittlere Scherspannung (Klebschicht) | $\tau_{km}$ | N/mm² | $.=F_{max}/A_k$ | 5,00 | 0,20 | $\tau_m/\sigma_{max}$ |
| Min. Scherspannung | $\tau_{min}$ | N/mm² | .=Min $\tau(x)$ | 0,00 | 0,0001 | $\tau_{min}/\sigma_{max}$ |
| Lage für minimale Scherspannung | $x(\tau_{min})$ | mm | → | 0,00 | 0,0000 | |

| | dimensionslose Darstellung | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Berechnung über die Gurtlänge** | $x$ | $x/l$ | $\sigma_o/\sigma_{max}$ | $\sigma_u/\sigma_{max}$ | $\tau_k/\sigma_{max}$ | $\lvert\sigma_u/\sigma_{max}\rvert$ |
| | 0,00 | 0,00 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0014 | 0,0000 |
| | 5,00 | 0,05 | 0,0002 | -0,0004 | 0,0015 | 0,0004 |
| | 10,00 | 0,10 | 0,0005 | -0,0008 | 0,0018 | 0,0008 |
| | 15,00 | 0,15 | 0,0009 | -0,0013 | 0,0024 | 0,0013 |
| | 20,00 | 0,20 | 0,0013 | -0,0020 | 0,0034 | 0,0020 |
| | 25,00 | 0,25 | 0,0020 | -0,0030 | 0,0048 | 0,0030 |
| | 30,00 | 0,30 | 0,0030 | -0,0045 | 0,0070 | 0,0045 |
| | 35,00 | 0,35 | 0,0044 | -0,0066 | 0,0103 | 0,0066 |
| | 40,00 | 0,40 | 0,0065 | -0,0097 | 0,0151 | 0,0097 |
| | 45,00 | 0,45 | 0,0096 | -0,0143 | 0,0222 | 0,0143 |
| | 50,00 | 0,50 | 0,0141 | -0,0211 | 0,0326 | 0,0211 |
| | 55,00 | 0,55 | 0,0207 | -0,0311 | 0,0479 | 0,0311 |
| | 60,00 | 0,60 | 0,0305 | -0,0457 | 0,0705 | 0,0457 |
| | 65,00 | 0,65 | 0,0448 | -0,0672 | 0,1037 | 0,0672 |
| | 70,00 | 0,70 | 0,0659 | -0,0988 | 0,1525 | 0,0988 |
| | 75,00 | 0,75 | 0,0969 | -0,1453 | 0,2242 | 0,1453 |
| | 80,00 | 0,80 | 0,1425 | -0,2137 | 0,3298 | 0,2137 |
| | 85,00 | 0,85 | 0,2096 | -0,3143 | 0,4850 | 0,3143 |
| | 90,00 | 0,90 | 0,3082 | -0,4623 | 0,7134 | 0,4623 |
| | 95,00 | 0,95 | 0,4533 | -0,6799 | 1,0492 | 0,6799 |
| | 100,00 | 1,00 | 0,6667 | -1,0000 | 1,5430 | 1,0000 |

10.25

**Spannungen in Abhängigkeit von der Längenkoordinate**
**Stresses as a funktion of the length coordinate**




10.26