Ableitung von Differenzengleichungen ausgehend von einer Parabelfunktion mit 3 Stützstellen für Näherungslösungen von linearen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung

Deviation of difference equations based on a parabolic function with 3 supporting points used for approximate solutions of linear differential equations 1st and 2d order

0.00

0. Problem, Zielstellung und Vorgehensweise / Problem, goal and method

Bei der Lösung von technischen Problemen stößt man häufig auf lineare Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung, deren exakte Lösung nicht möglich erscheint, die aber oft mit guter Näherung durch ein System linearer Gleichungen, welches durch Einführung von Differenzengleichungen aufgestellt werden kann, näherungsweise gelöst werden können.

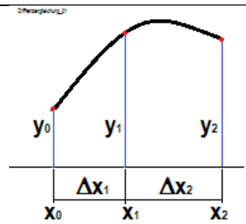
Der genäherte Verlauf der Lösungsfunktion soll hier für eine Vielzahl von dicht bei einander liegenden Stützstellen jeweils durch

Parabelabschnitte $\quad y(x) \approx a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

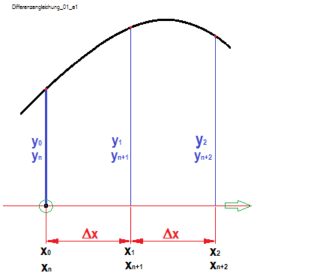
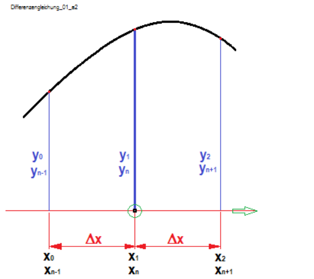
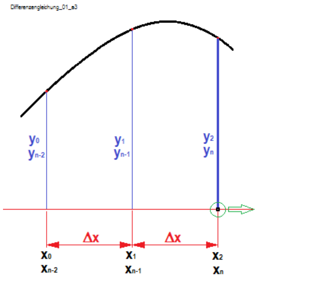
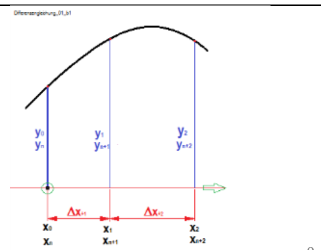
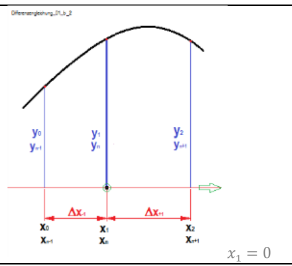
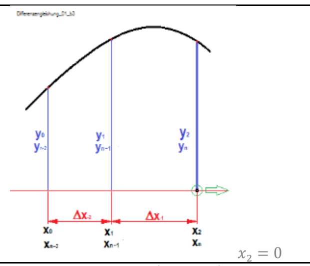
an diesen Stützstellen genähert werden. Jeder dieser differentiellen Parabelabschnitte ist dann definiert an 3 Stützstellen.
Ziel ist es, diese Parabelgleichungen aufzustellen für verschiedene Bedingungen zu ermitteln.
Mit einer Vielzahl dieser aneinander gereihten und sich zum Teil überschneidenden `differenziellen Parabelabschnitte´ kann ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden, welches für eine Näherungslösung der verwendet werden kann. Dieses Gleichungssystem kann dann u. a. durch den Gauß'schen Algorithmus gelöst werden [1].
Bei der allgemeinen Betrachtung werden diese Stützstellen $y(x_0), y(x_1), y(x_2)$ bezeichnet.
Bei Behandlung der Sonderfälle werden die Stützstellen mit $y(x_{n-1}),\ y(x_n),\ y(x_{n+1})$ bezeichnet, um die Position der Stützstelle, für welche die Näherung gilt, stets mit $y_n = y(x_n),\ y'_n = y'(x_n),\ y''_n = y''(x_n),$ fixieren zu können.

In solving of prolems one encouters differencial equations of 1st and 2d Order, their solutions seem not possible, but they can be solved with a good enough approximation by a system of linear equations, which by introduction of difference equations can be placed.

The course of solution function is to be approximated here for a variety of closely placed each other supporting points by the sections of parabolas $\quad y(x) \approx a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
at these supporting points. Each of the differential sections of parabolas is defined by 3 supporting points.
The goal is it, these parabolic equations to arrange for different conditions.
For general considerations the supporting points are defined by $y(x_0), y(x_1), y(x_2)$
For particular considerations the supporting points are defined by $y(x_{n-1}), y(x_n), y(x_{n+1})$
The point of approximation is fixed with $y_n = y(x_n),\ y'_n = y'(x_n),\ y''_n = y''(x_n)$

1.00	**1. Allgemeine Betrachtungen** / general method		
1.01 1.02 1.03 1.04	**Parabelfunktion, definiert durch 3 Stützstellen** Parabolic function, defined by 3 supporting points Bereich für die Näherungslösung Range of the approximate solution	$x_0 \le x \le x_2$	
1.05	**Parabelgleichung** Equation of parabola	**1. Ableitung** 1st deviation	**2. Ableitung** 2d deviation
1.06	$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	$y' = 2 \cdot a \cdot x + b$	$y'' = 2 \cdot a$
1.07	**Bestimmung der Koeffizienten** Calculation of coefficients	$y(x_0),\ y(x_1),\ y(x_2)$ werden als bekannt vorausgesetzt are assumed to be known	
1.08	$y_0 = a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c$ $y_1 = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c$ $y_2 = a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c$	$y'_0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$ $y'_1 = 2 \cdot a \cdot x_1 + b$ $y'_2 = 2 \cdot a \cdot x_2 + b$	$y''_0 = 2 \cdot a$ $y''_1 = 2 \cdot a$ $y''_2 = 2 \cdot a$
1.09	$a = \frac{D_a}{D}$	$b = \frac{D_b}{D}$	$c = \frac{D_c}{D}$
1.10	$D = \underbrace{x_0^2 \cdot x_1 \cdot 1 - x_0^2 \cdot 1 \cdot x_2} + \underbrace{x_0 \cdot 1 \cdot x_2^2 - x_0 \cdot x_1^2 \cdot 1} + \underbrace{1 \cdot x_1^2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_1 \cdot x_2^2}$ ☺ $D_a = \underbrace{y_0 \cdot x_1 \cdot 1 - y_0 \cdot 1 \cdot x_2} + \underbrace{x_0 \cdot 1 \cdot y_2 - x_0 \cdot y_1 \cdot 1} + \underbrace{1 \cdot y_1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_1 \cdot y_2}$ ☺ $D_b = \underbrace{x_0^2 \cdot y_1 \cdot 1 - x_0^2 \cdot 1 \cdot y_2} + \underbrace{y_0 \cdot 1 \cdot x_2^2 - y_0 \cdot x_1^2 \cdot 1} + \underbrace{1 \cdot x_1^2 \cdot y_2 - 1 \cdot y_1 \cdot x_2^2}$ ☺ $D_c = \underbrace{x_0^2 \cdot x_1 \cdot y_2 - x_0^2 \cdot y_1 \cdot x_2} + \underbrace{x_0 \cdot y_1 \cdot x_2^2 - x_0 \cdot x_1^2 \cdot y_2} + \underbrace{y_0 \cdot x_1^2 \cdot x_2 - y_0 \cdot x_1 \cdot x_2^2}$ ☺		
1.11	$a = \frac{-y_0 \cdot (x_2 - x_1) + y_1 \cdot (x_2 - x_0) - y_2 \cdot (x_1 - x_0)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_0^2 - x_0 \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2)}$	$b = \frac{y_0 \cdot (x_2^2 - x_1^2) - y_1 \cdot (x_2^2 - x_0^2) + y_2 \cdot (x_1^2 - x_0^2)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_0^2 - x_0 \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2)}$	$c = \frac{y_0 \cdot (x_1^2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2) + y_1 \cdot (x_0 \cdot x_2^2 - x_2 \cdot x_0^2) + y_2 \cdot (x_0^2 \cdot x_1 - x_0 \cdot x_1^2)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_0^2 - x_0 \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2)}$
1.12			
2.00	**Anwendungsfälle** / applications		↓

Klaus-Jürgen Bladt
18119 Rostock, Germany
Kontakt: www.jbladt.jimdo.com

2.01	**Fall 1** / case 1	3 äquidistante Stützstellen 3 equidistant supporting points	Abstand der Stützstellen $\lvert\Delta x_1\rvert = \lvert\Delta x_2\rvert = \Delta x$ Distance of supporting points
2.02		Berechnungen für die Stützstelle $y(x_n) = y_n$ Calculations for the Supporting point	
2.03	Linker Rand / left border $x_0 = x_n - x_n = 0$ $x_1 = x_{n+1} - x_n = \Delta x$ $x_2 = x_{n+2} - x_n = 2 \cdot \Delta x$	Mitte / middle $x_0 = x_n - x_{n-1} = \Delta x$ $x_1 = x_n - x_n = 0$ $x_2 = x_{n+1} - x_n = \Delta x$	Rechter Rand / right border $x_0 = x_n - x_{n-2} = 2 \cdot \Delta x$ $x_1 = x_n - x_{n-1} = \Delta x$ $x_2 = x_n - x_n = 0$
2.04			
2.05	$a_0 = \frac{y_n - 2 \cdot y_{n+1} + y_{n+2}}{2 \cdot \Delta x^2}$	$a_1 = \frac{y_{n-1} - 2 \cdot y_n + y_{n+1}}{2 \cdot \Delta x^2}$	$a_2 = \frac{y_{n-2} - 2 \cdot y_{n-1} + y_n}{2 \cdot \Delta x^2}$
2.06	$b_0 = \frac{-3 \cdot y_n + 4 \cdot y_{n+1} - y_{n+2}}{2 \cdot \Delta x}$	$b_1 = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2 \cdot \Delta x}$	$b_2 = \frac{y_{n-2} - 4 \cdot y_{n-1} + 3 \cdot y_n}{2 \cdot \Delta x}$
2.07	$c_0 = y_0$	$c_1 = y_1$	$c_2 = y_2$
2.08	$y(x) = a_0 \cdot x^2 + b_0 \cdot x + c_0$ $y(x_n) = y_n$	$y = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$ $y(x_n) = y_n$	$y(x) = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$ $y(x_n) = y_n$
2.09	$y'(x) = 2 \cdot a_0 \cdot x + b_0$ $y'(x_n) = y'_n = \frac{-3 \cdot y_n + 4 \cdot y_{n+1} - y_{n+2}}{2 \cdot \Delta x}$	$y' = 2 \cdot a_1 \cdot x + b_1$ $y'(x_n) = y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2 \cdot \Delta x}$	$y'(x) = 2 \cdot a_2 \cdot x + b_2$ $y'(x_n) = y'_n = \frac{y_{n-2} - 4 \cdot y_{n-1} + 3 \cdot y_n}{2 \cdot \Delta x}$
2.10	$y'' = \frac{y_n - 2 \cdot y_{n+1} + y_{n+2}}{2 \cdot \Delta x^2}$ $y''(x_n) = y''_n = \frac{y_n - 2 \cdot y_{n+1} + y_{n+2}}{\Delta x^2}$	$y'' = 2 \cdot a_1$ $y''(x_n) = y''_n = \frac{y_{n-1} - 2 \cdot y_n + y_{n+1}}{\Delta x^2}$	$y'' = 2 \cdot a_2$ $y''(x_n) = y''_n = \frac{y_{n-2} - 2 \cdot y_{n-1} + y_n}{\Delta x^2}$
2.12	**Fall 2** / case 2	3 Stützstellen mit ungleichem Abstand 3 supporting points with unequal distance	Abstand der Stützstellen $\lvert\Delta x_1\rvert \neq \lvert\Delta x_2\rvert$ Distance of supporting points
2.13		Berechnungen für die Stützstelle $y(x_n) = y_n$ Calculations for the supporting point	Info: $a = \frac{-y_0 \cdot (x_2 - x_1) + y_1 \cdot (x_2 - x_0) - y_2 \cdot (x_1 - x_0)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_0^2 - x_0 \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2)}$ $b = \frac{y_0 \cdot (x_2^2 - x_1^2) - y_1 \cdot (x_2^2 - x_0^2) + y_2 \cdot (x_1^2 - x_0^2)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_0^2 - x_0 \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2)}$ $c = \frac{y_0 \cdot (x_1^2 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2^2) + y_1 \cdot (x_0 \cdot x_2^2 - x_2 \cdot x_0^2) + y_2 \cdot (x_0^2 \cdot x_1 - x_0 \cdot x_1^2)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_0^2 - x_0 \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2)}$
2.14	Linker Rand / left border $x_0 = x_n - x_n = 0$ $x_1 = x_{n+1} - x_n = \Delta x_{+1}$ $x_2 = x_{n+2} - x_{n-1} = \Delta x_{+2}$	Mitte / middle $x_0 = x_n - x_{n-1} = \Delta x_{-1}$ $x_1 = x_n - x_n = 0$ $x_2 = x_{n+1} - x_n = \Delta x_{+1}$	Rechter Rand / right border $x_0 = x_{n-1} - x_{n-2} = \Delta x_{-2}$ $x_1 = x_n - x_{n-1} = \Delta x_{-1}$ $x_2 = x_n - x_n = 0$
2.15			
2.16	$a_0 = \frac{-y_n \cdot \Delta x_{+2} - y_{n+1}(\Delta x_{+1} + \Delta x_{+2}) - y_{n+2} \cdot \Delta x_{+1}}{-\Delta x_{+1} \cdot \Delta x_{+2} \cdot (\Delta x_{+1} + \Delta x_{+2})}$ $a_0 = \frac{y_n \cdot \frac{\Delta x_{+2}}{\Delta x_{+1}} - y_{n+1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{+2}}{\Delta x_{+1}}\right) + y_{n+2}}{\Delta x_{+1} \cdot \Delta x_{+2} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{+2}}{\Delta x_{+1}}\right)}$	$a_1 = \frac{-y_{n-1} \cdot \Delta x_{+1} + y_n \cdot (\Delta x_{-1} + \Delta x_{+1}) - y_{n+1} \cdot \Delta x_{-1}}{-\Delta x_{-1} \cdot \Delta x_{+1} \cdot (\Delta x_{-1} + \Delta x_{+1})}$ $a_1 = \frac{y_{n-1} \cdot \frac{\Delta x_{+1}}{\Delta x_{-1}} - y_n \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{+1}}{\Delta x_{-1}}\right) + y_{n+1}}{\Delta x_{-1} \cdot \Delta x_{+1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{+1}}{\Delta x_{-1}}\right)}$	$a_2 = \frac{-y_{n-2} \cdot \Delta x_{-1} + y_{n-1} \cdot (\Delta x_{-1} + \Delta x_{-2}) - y_n \cdot \Delta x_{-2}}{-\Delta x_{-1} \cdot \Delta x_{-2} \cdot (\Delta x_{-1} + \Delta x_{-2})}$ $a_2 = \frac{y_{n-2} - y_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{-2}}{\Delta x_{-1}}\right) + y_n \cdot \frac{\Delta x_{-2}}{\Delta x_{-1}}}{\Delta x_{-1} \cdot \Delta x_{-2} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{-2}}{\Delta x_{-1}}\right)}$
2.17	$b = \frac{y_n \cdot ((\Delta x_{+2} + \Delta x_{+1})^2 - x_{+1}^2) - y_{n+1} \cdot (\Delta x_{+2} + \Delta x_{+1})^2 + y_{n+2} \cdot x_{+1}^2}{-\Delta x_{+1} \cdot \Delta x_{+2} \cdot (\Delta x_{+1} + \Delta x_{+2})}$ $b_0 = \frac{-y_n \cdot \left(2 \cdot \frac{\Delta x_{+2}}{\Delta x_{+1}} + \frac{\Delta x_2^2}{\Delta x_1^2}\right) + y_{n+1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{+2}}{\Delta x_{+1}}\right)^2 - y_{n+2}}{\Delta x_{+2} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{+2}}{\Delta x_{+1}}\right)}$	$b_1 = \frac{y_{n-1} \cdot \Delta x_{+1}^2 - y_n \cdot (\Delta x_{+1}^2 - \Delta x_{-1}^2) - y_{n+1} \Delta x_{n-1}^2}{-\Delta x_{-1} \cdot \Delta x_{+1} \cdot (\Delta x_{-1} + \Delta x_{+1})}$ $b_1 = \frac{-y_{n-1} \cdot \frac{\Delta x_{+1}^2}{\Delta x_{-1}^2} + y_n \cdot \left(\frac{\Delta x_{+1}^2}{\Delta x_{-1}^2} - 1\right) + y_{n+1}}{\Delta x_{+1} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{+1}}{\Delta x_{-1}}\right)}$	$b_2 = \frac{-y_{n-2} \cdot \Delta x_{-1}^2 + y_{n-1} \cdot (\Delta x_{-1} + \Delta x_{-2})^2 + y_n \cdot (\Delta x_{-1}^2 - (\Delta x_{-1} + \Delta x_{-2})^2)}{-\Delta x_{-1} \cdot \Delta x_{-2} \cdot (\Delta x_{-1} + \Delta x_{-2})}$ $b_2 = \frac{y_{n-2} - y_{n-1}\left(1 + \frac{\Delta x_{-2}}{\Delta x_{-1}}\right)^2 + y_n \left(2 \cdot \frac{\Delta x_{-2}}{\Delta x_{-1}} + \frac{\Delta x_{-2}^2}{\Delta x_{-1}^2}\right)}{\Delta x_{-2} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x_{-2}}{\Delta x_{-1}}\right)}$
2.18	$c_0 = y_n$	$c_1 = y_n$	$c_2 = y_n$
2.19	$y(x) = a_0 \cdot x^2 + b_0 \cdot x + c_0$ $y(x_n) = y_n$	$y = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$ $y(x_n) = y_n$	$y(x) = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$ $y(x_n) = y_n$
2.20	$y'(x) = 2 \cdot a_0 \cdot x + b_0$ $y'(x_n) = y'_n = b_0$	$y' = 2 \cdot a_1 \cdot x + b_1$ $y'(x_n) = y'_n = b_1$	$y'(x) = 2 \cdot a_2 \cdot x + b_2$ $y'(x_n) = y'_n = b_2$
2.21	$y''(x) = 2 \cdot a_0$ $y''(x_n) = y''_n = 2 \cdot a_0$	$y''(x) = 2 \cdot a_1$ $y''(x_n) = y''_n = 2 \cdot a_1$	$y''(x) = 2 \cdot a_2$ $y''(x_n) = y''_n = 2 \cdot a_2$
2.22			
3.00	[1] http://jbladt.jimdo.com/app/download/11652318122/1-LinEqu-Gauss_97.xls?t=1427797884		

Klaus-Jürgen Bladt
18119 Rostock, Germany
Kontakt: www.jbladt.jimdo.com

Printed: 2015-06-21